2006年度　線形代数II　第1回レポート解答

問題1

(1) $f_1, f_2 \in F_1$ とすると，$\int_0^{2\pi} f_1(x)\sin x\,dx = 0$，$\int_0^{2\pi} f_2(x)\sin x\,dx = 0$ が成り立つ。この2つの式を加えると，$\int_0^{2\pi}\{f_1(x)+f_2(x)\}\sin x\,dx = 0$ となり，これは $f_1 + f_2 \in F_1$ を意味する。また，第1式に任意のスカラー k をかけると，$\int_0^{2\pi}(kf_1(x))\sin x\,dx = 0$ となり，これは，$kf_1 \in F_1$ を意味する。以上より，F_1 は線形空間である。

(2) $A, B \in M_1$ とすると，$a_{ij} = a_{ji}$，$b_{ij} = b_{ji}$ が成り立つ。いま，$C = A + B$ とすると，$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$ だから，$C \in M_1$。また，k を任意のスカラーとして $D = kA$ とすると，$d_{ij} = ka_{ij} = ka_{ji} = d_{ji}$ より，$D \in M_1$。よって M_1 は線形空間である。

(3) $A \in M_2$ とすると，直交行列の定義より ${}^t\!AA = I$（I は単位行列）。一方，k をスカラーーとして A を k 倍した行列を考えると，${}^t(kA)(kA) = k^2\,{}^t\!AA = k^2 I$ だから，一般に $kA \notin M_2$。よって，M_2 は線形空間でない。

問題2

V を定める連立一次方程式の拡大係数行列は

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \tag{1}$$

である。これに対して行基本変形を行うと，

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{array}\right] \tag{2}$$

となる。これより，x，y を z，w で表すと，次のようになる。

$$x = -\frac{5}{3}z - \frac{2}{3}w \tag{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}z - \frac{5}{3}w \tag{4}$$

いま，分数をなくして簡単化するために $z = 3s$，$w = 3t$ とすると，

$$x = -5s - 2t \tag{5}$$

$$y = -2s - 5t \tag{6}$$

となるから

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} t \tag{7}$$

と書ける。そこで，

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

が V の基底となる。次元は 2 である。

注意 基底の取り方には自由度があるから，同じ空間を張っていれば，別の基底も正しい解である。たとえば，式 (4) で変数 z，w を x，y で表すと，別の基底が得られる。また，ここでは簡単化のため分数をなくしたが，これを行わないと，定数倍だけ異なる基底が得られる。

問題 3

(1) 与えられた 4 本のベクトルを列とする 4×4 行列の行列式を計算する。第 1 行に関する展開を行い，次に第 1 列に関する展開を行うと，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -5 & -5 \\ 4 & -8 & -11 & -13 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-5)\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 11 & 13 \end{vmatrix} \\
&= (-20)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (-20)\cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (-60) \times (-2) = 120
\end{aligned} \tag{9}$$

行列式が 0 でないから，与えられた 4 個の列ベクトルは 1 次独立である。

(2) ロンスキー行列式は

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos 2x \\ \cos x & -\sin x & 2\cos 2x & -2\sin 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4\sin 2x & -4\cos 2x \\ -\cos x & \sin x & -8\cos 2x & 8\sin 2x \end{vmatrix} \tag{10}$$

となる。ここで $x = 0$ とおくと，行・列の入れ替えと列・行に関する展開を用いて計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)\cdot(-3)\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-3) \times (-6) = 18
\end{aligned} \tag{11}$$

ロンスキー行列式が 0 でないから，与えられた 4 個の関数は 1 次独立である。

問題 4

(1) まず，$\mathbf{v}_1$ を正規化（ノルムを 1 にする）して次のように $\mathbf{e}_1$ を作る。

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

次に，$\mathbf{e}_2{}' = \mathbf{v}_2 + c\mathbf{e}_1$ とおき，$\mathbf{e}_2{}'$ が $\mathbf{e}_1$ と直交するよう c を定める。この条件は，

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2{}') = (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2) + c(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2) + c = 0 \tag{13}$$

よって，

$$c = -(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2) = -\frac{1}{\sqrt{38}}[-5, -2, 3, 0] \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{20}{\sqrt{38}} \tag{14}$$

これより，

$$\mathbf{e}_2{}' = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{20}{\sqrt{38}} \cdot \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 12 \\ -75 \\ -30 \\ 57 \end{bmatrix} = \frac{3}{19} \begin{bmatrix} 4 \\ -25 \\ -10 \\ 19 \end{bmatrix} \tag{15}$$

これを正規化すると，

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_2{}'}{\| \mathbf{e}_2{}' \|} = \frac{1}{\sqrt{1102}} \begin{bmatrix} 4 \\ -25 \\ -10 \\ 19 \end{bmatrix} \tag{16}$$

となる。$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ が正規直交基底である。

注意 正規直交基底の取り方には自由度があるから，同じ空間を張り，かつ正規直交の条件を満たしていれば，別解もありうる。正しい解かどうかを判定するには，(i) 正規直交条件を満たしていること，(ii) 両方のベクトルが問題 2 の線形空間 V に入っていること（すなわち，2 本とも，2 本の連立方程式を満たしていること），の 2 点を確かめればよい。

(2) 教科書の例題 4.8 と全く同様にして，問題 2 で求めた $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ で張られる空間の直交補空間の正規直交基底を求めればよい。

ただし，もう少し簡単なやり方がある。それには，線形空間 V が，空間 $\mathbf{R}^4$ の中の 2 つのベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

で張られる空間 W の直交補空間に他ならないことを使う。したがって，本小問で求める空間は，$V^\perp = \left(W^\perp\right)^\perp$ である。さらに，一般の部分空間 W に対して

$$\left(W^\perp\right)^\perp = W \tag{18}$$

が成り立つ（ここでは証明はしないが，たとえば 3 次元空間中で W が 2 次元平面などの場合を考えてみるとよい）。したがって，求める空間は $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ で張られる空間であるから，$\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ が基底である。そこで，これらを正規直交化すればよい。

まず，$\mathbf{u}_1$ を正規化して次のように $\mathbf{f}_1$ を作る。

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{19}$$

次に，$\mathbf{f}_2{}' = \mathbf{u}_2 + c\mathbf{f}_1$ とおき，$\mathbf{f}_2{}'$ が $\mathbf{f}_1$ と直交するよう c を定める。この条件は，小問 (1) と同様に，

$$c = -(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}_2) = -\frac{1}{\sqrt{30}}[1, 2, 3, 4]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{28}{\sqrt{30}} \tag{20}$$

これより，

$$\mathbf{f}_2{}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{28}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 16 \\ -13 \\ 18 \\ -11 \end{bmatrix} \tag{21}$$

これを正規化すると，

$$\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{f}_2{}'}{\|\mathbf{f}_2{}'\|} = \frac{1}{\sqrt{870}}\begin{bmatrix} 16 \\ -13 \\ 18 \\ -11 \end{bmatrix} \tag{22}$$

となる。$\mathbf{f}_1$，$\mathbf{f}_2$ が正規直交基底である。

注意 正規直交基底の取り方には自由度があるから，同じ空間を張り，かつ正規直交の条件を満たしていれば，別解もありうる。正しい解かどうかを判定するには，(i) 正規直交条件を満たしていること，(ii) $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ の両方と直交すること，の 2 点を確かめればよい。