2006年度　線形代数 II　第2回レポート解答

問題 1

(1) $f, g \in \mathbf{R}[x]_3$, $k \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} F(f+g) &= x\frac{d}{dx}(f+g) - 2(f+g) \\ &= x\frac{df}{dx} + x\frac{dg}{dx} - 2f - 2g \\ &= \left(x\frac{df}{dx} - 2f\right) + \left(x\frac{dg}{dx} - 2g\right) = F(f) + F(g), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} F(kf) &= x\frac{d}{dx}(kf) - 2(kf) \\ &= k\left(x\frac{df}{dx} - 2f\right) = kF(f) \end{aligned} \tag{2}$$

よって F は線形変換である。

(2) 基底の各要素に対する F の作用を考えると,

$$F(1) = x \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2 \tag{3}$$

$$F(x) = x \cdot 1 - 2 \cdot x = -x \tag{4}$$

$$F(x^2) = x \cdot 2x - 2 \cdot x^2 = 0 \tag{5}$$

$$F(x^3) = x \cdot 3x^2 - 2 \cdot x^3 = x^3 \tag{6}$$

よって, F の表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる。

(3)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \tag{8}$$

とすると,

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2a \\ -b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \tag{9}$$

よって,

$$A\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff a = b = d = 0 \tag{10}$$

したがって，

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

（c は任意の実数）となる。

(4) ベクトル

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

は $\mathbf{R}[x]_3$ の元 cx^2 に対応する。したがって，Ker $F = \{cx^2\}$（c は任意の実数）である。

問題 2

(1) 2 本のベクトルの内積が変換 A によって不変であるための条件を求める。

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ とすると，$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dz \end{bmatrix}$，$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} az+bw \\ cz+dw \end{bmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v}) &= (ax+by)(az+bw) + (cx+dy)(cz+dw) \\ &= (a^2+c^2)xz + (b^2+d^2)yw + (ab+cd)xw + (ab+cd)yz \end{aligned} \tag{13}$$

これが $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = xz + yw$ と恒等的に等しくなるためには，係数の比較より，

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \tag{14}$$

が必要十分であることがわかる。

(2) $a = \cos\theta$，$c = \sin\theta$，$b = \sin\theta'$，$d = \cos\theta'$ とおいて式 (14) の第 3 式に代入すると，

$$\begin{aligned} \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(\theta+\theta') = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \theta' = -\theta \text{ または } \theta' = \pi - \theta \end{aligned} \tag{15}$$

ここで，sin，cos の周期性より，θ' は 2π だけ違っても a, b, c, d は同一だから，θ' としてはこの 2 通りの解だけを考えればよい。それぞれの場合について，行列 A は次のようになる。

(i) $\theta' = -\theta$ のときは，$\sin\theta' = -\sin\theta$，$\cos\theta' = \cos\theta$ だから，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{16}$$

(ii) $\theta' = \pi - \theta$ のときは，$\sin\theta' = \sin\theta$，$\cos\theta' = -\cos\theta$ だから，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{17}$$

となる。

(3) 行列式が -1 となるのは小問 (2) の (ii) の場合である。この場合について，(x, y) と点 (x', y') とを結ぶ線分が直線 $y = \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) x$ に垂直であり，かつ，線分の中点がこの直線上にあることを示す。

まず，点 (x, y) を始点，点 (x', y') を終点とするベクトルは，

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \left(-2\sin\frac{\theta}{2} \cdot x + 2\cos\frac{\theta}{2} \cdot y\right) \begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{18}$$

となる。一方，直線 $y = \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) x$ に平行なベクトルは $[\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}]^t$ であるから，これらは明らかに互いに垂直である。

次に，線分の中点は，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2} \cdot x + 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot y\right) \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{19}$$

この点は明らかに直線 $y = \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) x$ 上にある。

以上より，与えられた線形変換は直線 $y = \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) x$ に関する折り返しである。

問題 3

(1) 基底の各要素に対する F の作用を考えると，

$$\begin{aligned}
F(1) &= 1 && (20) \\
F(\cos x) &= \cos(x + c) = \cos c \cos x - \sin c \sin x && (21) \\
F(\sin x) &= \sin(x + c) = \sin c \cos x + \cos c \sin x && (22) \\
F(\cos 2x) &= \cos(2(x + c)) = \cos 2c \cos 2x - \sin 2c \sin 2x && (23) \\
F(\sin 2x) &= \sin(2(x + c)) = \sin 2c \cos 2x + \cos 2c \sin 2x && (24)
\end{aligned}$$

よって，F の表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c & 0 & 0 \\ 0 & -\sin c & \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 2c & \sin 2c \\ 0 & 0 & 0 & -\sin 2c & \cos 2c \end{pmatrix} \tag{25}$$

となる。

(2) V に属する関数はすべて周期 2π の周期関数であることに注意すると，

$$\begin{aligned} (F(f), F(g)) &= \int_0^{2\pi} f(x+c)g(x+c)\,dx \\ &= \int_c^{2\pi+c} f(x')g(x')\,dx' \\ &= \int_c^{2\pi} f(x)g(x)\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi+c} f(x)g(x)\,dx \\ &= \int_c^{2\pi} f(x)g(x)\,dx + \int_0^{c} f(x)g(x)\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = (f, g) \end{aligned} \tag{26}$$

よって F は直交変換である。