

2006 年度 線形代数 II 演習問題 (第 1 回) 解答

問題 1

(1) $f, g \in F_1$ とすると ,

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = 0 \quad (1)$$

だから , $f+g \in F_1$ 。また ,

$$\int_a^b (kf)(x) dx = \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx = 0 \quad (2)$$

だから $kf \in F_1$ 。よって F_1 は線形空間である。

(2) $f, g \in F_2$ とすると ,

$$(f+g)''(x) + 3(f+g)'(x) + 2(f+g)(x) = f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) + g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = 0 \quad (3)$$

だから , $f+g \in F_2$ 。また ,

$$(kf)''(x) + 3(kf)'(x) + 2(kf)(x) = k\{f''(x) + 3f'(x) + 2f(x)\} = 0 \quad (4)$$

だから , $kf \in F_2$ 。よって F_2 は線形空間である。

(3) $f \in F_3$ とするとき , $2f$ を考えると ,

$$(2f)''(x) + \{(2f)(x)\}^2 = 2[f''(x) + \{f(x)\}^2] + 2\{f(x)\}^2 = 2\{f(x)\}^2 \quad (5)$$

となるが , 一般に $2\{f(x)\}^2 \neq 0$ であるから , $2f \notin F_3$ 。よって F_3 は線形空間でない。

(4) $f, g \in F_4$ とすると , ある実数 a, b, c, d により $f(x) = a \sin(x+b)$, $g(x) = c \sin(x+d)$ と書ける。このとき , 三角関数の加法定理を使うと ,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= a(\sin x \cos b + \cos x \sin b) + c(\sin x \cos d + \cos x \sin d) \\ &= (a \cos b + c \cos d) \sin x + (a \sin b + c \sin d) \cos x \\ &= \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos(b-d)} (\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos(b-d)} \sin(x+\theta) \end{aligned} \quad (6)$$

と書ける。ここで , θ は

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a \cos b + c \cos d}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos(b-d)}}, \\ \sin \theta &= \frac{a \sin b + c \sin d}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos(b-d)}} \end{aligned} \quad (7)$$

を満たす実数である。これより , $f+g \in F_4$ 。また , $kf = (ka) \sin(x+b)$ だから , 明らかに $kf \in F_4$ 。よって F_4 は線形空間である。

(5) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$ とすると ,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \\ A(k\mathbf{x}_1) &= kA\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

よって V_1 は線形空間である。

(6) $y_1, y_2 \in V_1$ とすると, ある x_1, x_2 が存在して $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$ と書ける。このとき,

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2), \\ ky_1 &= kAx_1 = A(kx_1) \end{aligned} \quad (9)$$

であるから, $y_1 + y_2$ も ky_1 も, あるベクトルに A をかけたベクトルとして表現できる。よって $y_1 + y_2 \in V_2$ かつ $ky_1 \in V_2$ 。したがって V_2 は線形空間である。

問題 2

(1) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x, \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ であるから,

$$\sin x - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (10)$$

が成り立つ。よってこれらは 1 次独立でない。

(2) a, b, c を 3 つの実数とすると,

$$\begin{aligned} &a(x^2 + x + 1) + b(x^2 + 2x + 3) + c(x^2 + 3x + 4) \\ &= (a + b + c)x^2 + (a + 2b + 3c)x + (a + 3b + 4c) \end{aligned} \quad (11)$$

これが 0 に等しくなるには, $x^2, x, 1$ の係数のすべてが 0 になる必要がある。すなわち,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで, 係数行列の行列式を計算してみると -1 となるので, 逆行列が存在する。そこで, 逆行列を上式の両辺にかけると, $a = b = c = 0$ が導ける。よって 1 次独立性の定義より, これらは 1 次独立である。

(3) 前問と同様にして a, b, c に対する連立 1 次方程式を立てると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

となる。これに対して行基本変形を行うと,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

となる。この最後の方程式は, $b = -2c, a = c$ であれば成り立つので, $a = b = c = 0$ 以外の解を持つ。よって 1 次独立性の定義より, これらの要素は 1 次独立でない。

問題 3

- (1) この空間に属する数列は，最初の 3 項を定めれば，あとの項は漸化式により自動的に定まる。いま， $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$ を満たす数列 $\{a_n\}$ ， $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$ を満たす数列 $\{b_n\}$ ， $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1$ を満たす数列 $\{c_n\}$ を考えると，これらは明らかに 1 次独立である。また，漸化式を満たす任意の数列を $\{x_n\}$ とし， $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma$ とすると，数列 $\{\alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n\}$ は漸化式を満たし，最初の 3 項が $\{x_n\}$ と同じであるから， $\{x_n\}$ と等しい。したがって， $\{x_n\}$ は $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の線形結合で表せる。これより， $\{\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}\}$ は基底である。空間の次元は 3 である。
- (2) 4×4 の任意の交代行列 A は，6 個の実数 a, b, c, d, e, f を用いて

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

と書ける。そこで，6 個の交代行列

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

を考えると，これらは明らかに 1 次独立である ($aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 = 0$ となるのは， $a = b = c = d = e = f = 0$ のときのみ)。さらに，式 (16) より，任意の交代行列 A は $A = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6$ と書ける。よって， $\{E_1, E_2, \dots, E_6\}$ は基底である。空間の次元は 6 である。

- (3) 連立 1 次方程式 $Ax = 0$ に対して行基本変形を行うと，

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \quad (18)$$

よって，この連立 1 次方程式の一般解は $x_1 = s + 2t, x_2 = -2s - 3t, x_3 = s, x_4 = t$ (s, t は任意定数) で与えられる。これを列ベクトルの形に整理すると，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

となる。そこで，

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

とおくと， $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は明らかに 1 次独立であり，これらが基底である。空間の次元は 2 次元である。

問題 4

まず x^2 について考える。 x^2 を問題 2(2) の 3 個の多項式の線形結合として表すと,

$$\begin{aligned} & a(x^2 + x + 1) + b(x^2 + 2x + 3) + c(x^2 + 3x + 4) \\ = & (a + b + c)x^2 + (a + 2b + 3c)x + (a + 3b + 4c) = x^2 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで, x の各次数の項の係数を比較することにより, a, b, c について次の連立 1 次方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

これを解くと, $a = 1, b = 1, c = -1$ 。よって, x^2 は $\mathbf{R}^3$ の元

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

に対応付けられる。

同様にして, $x, 1$ はそれぞれ数ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

に対応付けられる。