2006 年度　線形代数 II　演習問題（第 2 回）解答

問題 1

(1) (R1) 〜 (R4) が成り立つことは以下のようにして示せる。

(R1)

$$(\mathbf{b},\mathbf{a}) = {}^t\mathbf{b}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\mathbf{a} = {}^t\mathbf{a}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^t\mathbf{b} = {}^t\mathbf{a}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{b}) \tag{1}$$

(R2)

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= ({}^t\mathbf{a})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = {}^t\mathbf{a}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\mathbf{b} + {}^t\mathbf{a}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\mathbf{a}\\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{c})\end{aligned} \tag{2}$$

$(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{c},\mathbf{b})$ も同様にして示せる。

(R3) k を任意のスカラーとするとき，

$$(\mathbf{a},k\mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}(k\mathbf{b}) = k\,{}^t\mathbf{a}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{b})。 \tag{3}$$

(R4) $\mathbf{a} = {}^t(a_1,a_2,a_3)$ とすると，

$$(\mathbf{a},\mathbf{a}) = {}^t\mathbf{a}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\mathbf{a} = a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 \geq 0。 \tag{4}$$

また，$(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$ となるのは $a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 = 0$，すなわち $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ のとき，つまり $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときに限る。

(2) (R1) 〜 (R4) が成り立つことは以下のようにして示せる。

(R1)

$$(g,f) = \int_0^\infty e^{-x} g(x)f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)\,dx = (f,g) \tag{5}$$

(R2)

$$\begin{aligned}(f,g+h) &= \int_0^\infty e^{-x} f(x)\{g(x)+h(x)\}\,dx = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)\,dx + \int_0^\infty e^{-x} f(x)h(x)\,dx\\ &= (f,g) + (f,h)\end{aligned} \tag{6}$$

$(f+h,g) = (f,g) + (h,g)$ も同様にして示せる。

(R3) k を任意のスカラーとするとき，

$$(f,kg) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\cdot kg(x)\,dx = k\int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)\,dx = k(f,g)。 \tag{7}$$

(R4)

$$(f,f) = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) f(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\{f(x)\}^2\,dx \geq 0 \tag{8}$$

ここで，最後の不等式は，被積分関数が積分区間 $[0,\infty)$ で常に非負であることから従う。また，$(f,f)=0$ となるのは $= \int_0^{\infty} e^{-x}\{f(x)\}^2\,dx = 0$ のときであるが，この被積分関数は非負かつ連続であるので,「$h(x) \geq 0$ を満たす連続関数 $h(x)$ について，$\int_0^{\infty} h(x)dx = 0$ ならば $h(x)=0$」という補題を使うと，$e^{-x}\{f(x)\}^2 = 0$，すなわち $f(x)=0$ となる。

問題 2

(1) $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$ とするとき，これらが正規直交系の定義

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} 1 & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{9}$$

を満たすことを示せばよい。実際に計算してみると，

$$\begin{aligned} (f_0,f_0) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = 1, & (10) \\ (f_0,f_1) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0 & (11) \end{aligned}$$

となり，これらについては式 (9) を満たしていることがわかる。他の組み合わせにしても，同様に式 (9) を満たすことが示せるので，与えられた関数の集合は正規直交系である。

(2) $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos jx$（$j=1,2,\ldots,m$）とするとき，これらが正規直交系の定義 (9) を満たすことを示す。ただし，$(f_i,f_j)=(f_j,f_i)$ であるから，$i \leq j$ の場合のみを考えればよい。まず，$(f_0,f_0)=1$ は式 (10) で既に示した。次に，$1 \leq j \leq m$ を満たす任意の j に対し，

$$\begin{aligned} (f_0,f_j) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos jx,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \cos jx\,dx = 0, \\ (f_j,f_j) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\cos^2 jx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2jx)\right\} dx = 1 & (12) \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで，あとは $1 \leq j < k \leq m$ を満たす j,k に対して $(f_j,f_k)=0$ を示せばよい。このため，三角関数の積を和に直す公式

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\} \tag{13}$$

を用いると，

$$(f_j,f_k) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos jx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\cos((j+k)x) + \cos((j-k)x)\}\,dx = 0 \tag{14}$$

ここで，任意の 0 でない整数 n に対して $\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = 0$ であることを用いた。以上より，すべての場合について式 (9 が成り立つので，与えられた関数の集合は正規直交系である。

問題 3

(1) まず，$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ の場合を考える。シュワルツの不等式の証明では，次の恒等式

$$\| t\mathbf{a} - \mathbf{b} \|^2 = \frac{1}{\| \mathbf{a} \|}\left(t - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\| \mathbf{a} \|^2}\right)^2 + \frac{1}{\| \mathbf{a} \|}\left\{\| \mathbf{a} \|^2 \| \mathbf{b} \|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\right\} \tag{15}$$

を導き，左辺が非負であることから，t の 2 次関数である右辺の最小値が非負であること，すなわち

$$\frac{1}{\| \mathbf{a} \|}\left\{\| \mathbf{a} \|^2 \| \mathbf{b} \|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\right\} \geq 0 \tag{16}$$

を導いた。いま，シュワルツの不等式で等号が成り立つ場合とは，

$$\| \mathbf{a} \|^2 \| \mathbf{b} \|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = 0 \tag{17}$$

が成り立つ場合だから，これは右辺の 2 次関数の最小値が 0 となる場合である。これはすなわち，左辺がある t に対して 0 となるとき，すなわち，$t\mathbf{a} = \mathbf{b}$ となる t が存在する場合である。一方，$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ の場合には，式 (17) は常に成り立つ。以上より，シュワルツの不等式の等号が成り立つ場合とは，$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であるときか，$\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}$ の定数倍となるときであることがわかる。

(2) 両辺は非負だから，右辺の 2 乗から左辺の 2 乗を引いて 0 以上となることを示せばよい。内積とノルムの関係 $\| x \|^2 = (x, x)$ を使って計算すると，

$$\begin{aligned}
(\| x \| + \| y \|)^2 - \| x + y \|^2 &= \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 - (x + y, x + y) \\
&= \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 - \left\{\| x \|^2 + 2(x, y) + \| y \|^2\right\} \\
&= 2 \left\{\| x \| \| y \| - (x, y)\right\} \geq 0
\end{aligned} \tag{18}$$

ここで，最後の不等式ではシュワルツの不等式を用いた。以上より，与えられた不等式が成り立つ。なお，この不等式は x, y が幾何ベクトルの場合，三角形の 2 辺の和が他の 1 辺よりも長いことを意味するので，三角不等式と呼ばれる。