2006年度 線形代数II 演習問題(第3回)解答

問題1

(1) 与えられたベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とおくと,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1 = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}'_2}{\|\mathbf{e}'_2\|} = \frac{1}{6\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}'_3}{\|\mathbf{e}'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が正規直交したベクトルである。

(2) $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$ とおくと,

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{f_0}{\|f_0\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty e^{-x} \cdot 1 \cdot 1 dx}} = \frac{1}{1} = 1, \\ e'_1 &= f_1 - (e_0, f_1)e_0 = x - \left(\int_0^\infty e^{-x} \cdot 1 \cdot x dx \right) \cdot 1 = x - 1, \\ e_1 &= \frac{e'_1}{\|e'_1\|} = \frac{x-1}{\sqrt{\int_0^\infty e^{-x} \cdot (x-1)^2 dx}} = \frac{x-1}{1} = x-1, \\ e'_2 &= f_2 - (e_0, f_2)e_0 - (e_1, f_2)e_1 \\ &= x^2 - \left(\int_0^\infty e^{-x} \cdot 1 \cdot x^2 dx \right) \cdot 1 - \left(\int_0^\infty e^{-x} \cdot (x-1) \cdot x^2 dx \right) \cdot (x-1) \\ &= x^2 - 4x + 2 \\ e_2 &= \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \frac{x^2 - 4x + 2}{\sqrt{\int_0^\infty e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2)^2 dx}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \end{aligned} \tag{2}$$

したがって, $e_0(x) = 1, e_1(x) = x - 1, e_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ が正規直交した関数である。これらは Laguerre 多項式と呼ばれ, 量子力学で水素原子の波動関数を計算するときに必要となる。

問題2

グラム・シュミットの直交化の中間段階の式

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{e}_i, \mathbf{v}_k)\mathbf{e}_i \tag{3}$$

と $\mathbf{e}_j$ ($1 \leq j \leq k-1$) との内積を計算すると,

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}'_k) &= (\mathbf{e}_j, \mathbf{v}_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_k) (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \\ &= (\mathbf{e}_j, \mathbf{v}_k) - (\mathbf{e}_j, \mathbf{v}_k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$ の直交性より, $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ は $i = j$ のとき 1, それ以外のとき 0 となることを用いた。
 $\mathbf{e}_k$ は $\mathbf{e}'_k$ を正規化することにより得られるから, $\mathbf{e}_k$ も $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$ と直交していることがわかる。

問題 3

(1) 与えられたベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とおくと,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}'_2}{\|\mathbf{e}'_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}'_3}{\|\mathbf{e}'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が正規直交したベクトルである。

(2) 与えられた行列の列は小問 (1) の $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ であるから, (1) のグラム・シュミットの直交化の結果を利用できる。QR 分解の公式より,

$$Q = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$R = \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3) \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3) \\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる。なお, 積 QR を計算すると, 実際に元の行列になっているのを確かめることができる。