2006年度　線形代数II　中間試験

- 大問題ごとに解答用紙を1枚使うこと。
- 解答用紙には，氏名，学籍番号，大問題の番号を記入すること。

問題1

次の集合が線形空間であることを示せ。また，基底を1組求め，次元を求めよ。

(1) 定数 a, b, c を用いて $ax^2 + bxy + cy^2$ と書ける x, y の関数の集合。

(2) $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とするとき，$JA - AJ = O$（O はゼロ行列）を満たす 2×2 行列の集合。
ただし行列の要素は実数とする。

問題2

実数を係数とする2次以下の多項式のなす空間を $\mathbf{R}[x]_2$ とし，$f, g \in \mathbf{R}[x]_2$ に対して，

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) g(x_i)$$

（ただし $x_0 = -1$，$x_1 = 0$，$x_2 = 1$）と定義する。このとき，次の問に答えよ。

(1) (f, g) が $\mathbf{R}[x]_2$ の内積であることを示せ。

(2) この内積に対し，$\{1, x, x^2\}$ をグラム・シュミットの方法により正規直交化せよ。

問題3

$\mathbf{R}^4$ における2本のベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で張られる $\mathbf{R}^4$ の部分空間を V とする。V の直交補空間 $V^\perp$ の正規直交基底を1組求めよ。