

2006 年度 線形代数 II 中間試験解答

問題 1

- (1) 与えられた集合を X とする。 $f, g \in X$ とすると, ある $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を用いて

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 \\ g(x, y) &= a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \end{aligned} \quad (1)$$

と書ける。これらを辺々加え合わせると,

$$(f + g)(x, y) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)xy + (c_1 + c_2)y^2 \quad (2)$$

よって, 明らかに $f + g \in X$ 。また,

$$(kf)(x, y) = k(a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2) = (ka_1)x^2 + (kb_1)xy + (kc_1)y^2 \quad (3)$$

だから, $kf \in X$ 。よって集合 X は線形空間である。また, X に属する 3 つの関数 x^2, xy, y^2 を考えると, これらは明らかに 1 次独立 ($ax^2 + bxy + cy^2$ が恒等的に 0 になるのは $a = b = c$ のときのみ) で, かつ X に属する任意の関数はこれらの 1 次結合で書ける。したがって, $\{x^2, xy, y^2\}$ は基底である。基底の要素が 3 個であるから, X の次元は 3 である。

- (2) 与えられた集合を Y とする。 A_1, A_2 を 2×2 の実行列とし, $A_1, A_2 \in Y$ とすると, 行列の加算・乗算に関する分配法則より,

$$\begin{aligned} J(A_1 + A_2) - (A_1 + A_2)J &= JA_1 + JA_2 - A_1J - A_2J \\ &= (JA_1 - A_1J) + (JA_2 - A_2J) \\ &= O + O = O \end{aligned} \quad (4)$$

となるから, $A_1 + A_2 \in Y$ である。また, k をスカラーとすると,

$$J(kA_1) - (kA_1)J = kJA_1 - kA_1J = k(JA_1 - A_1J) = kO = O \quad (5)$$

だから, $kA_1 \in Y$ となる。よって集合 Y は線形空間である。

いま, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} A \in Y &\Leftrightarrow JA - AJ = O \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = O \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = O \\ &\Leftrightarrow a = d \quad \text{かつ} \quad b = c \end{aligned} \quad (6)$$

よって,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

と書ける。したがって，

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

が基底となる。基底の要素が 2 個であるから， Y の次元は 2 である。

問題 2

(1) (f, g) が内積の性質 (R1) ~ (R4) を満たすことを示す。定義に従って計算すると，

$$(R1) \quad (f, g) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)g(x_i) = \sum_{i=0}^2 g(x_i)f(x_i) = (g, f) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R2) \quad (f + g, h) = \sum_{i=0}^2 \{f(x_i) + g(x_i)\} h(x_i) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)h(x_i) + \sum_{i=0}^2 g(x_i)h(x_i) = (f, h) + (g, h) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R3) \quad k \text{ をスカラーとするととき, } (kf, g) = \sum_{i=0}^2 \{kf(x_i)\} g(x_i) = k \sum_{i=0}^2 f(x_i)g(x_i) = k(f, g) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R4) \quad f \in \mathbf{R}[x]_2 \text{ とし, } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} (f, f) &= \sum_{i=0}^2 \{f(x_i)\}^2 \\ &= \{f(-1)\}^2 + \{f(0)\}^2 + \{f(1)\}^2 \\ &= (a - b + c)^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

また，

$$\begin{aligned} (f, f) = 0 &\Leftrightarrow a - b + c = 0 \quad \text{かつ} \quad c = 0 \quad \text{かつ} \quad a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

よって (R4) も成り立つ。

以上より，(R1) ~ (R4) のすべてが成り立つので， (f, g) は内積である。

(2) まず， 1 ($f(x) = 1$ という定数関数) をこの内積から導かれるノルムにより規格化し， e_1 を作る。

$$\|1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \quad \text{より, } e_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (11)$$

次に， x を e_1 に対して直交化し， e_2' を作る。ところが，

$$(e_1, x) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 \quad (12)$$

より， x は既に e_1 に直交している。そこで， x を規格化して e_2 を作ればよい。

$$\|x\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \quad \text{より, } e_2 = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}x \quad (13)$$

最後に, x^2 を e_1, e_2 に対して直交化すると,

$$\begin{aligned} e_3' &= x^2 - (e_1, x^2)e_1 - (e_2, x^2)e_2 \\ &= x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}((-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}x \\ &= x^2 - \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (14)$$

さらに,

$$\|e_3'\|^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \quad (15)$$

より,

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) \quad (16)$$

e_1, e_2, e_3 が求める正規直交系である。

問題 3

いま, $\mathbf{u} = {}^t[x, y, z, w]$ とする。「張る空間」の定義より, V に属する任意のベクトルは $\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ と書けるから,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in V^\perp &\Leftrightarrow \text{任意の } \mathbf{v} \in V \text{ に対して } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3w = 0 \\ 3x + 2z + w = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}w \\ z = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}w \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

よって (分数をなくすために) $x = 2s, w = 2t$ とおくと,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} t \quad (18)$$

したがって,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

が $V^\perp$ の基底である。正規直交基底を作るには, まず $\mathbf{u}_1$ を規格化し, $\mathbf{e}_1$ とする。

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

次に, $\mathbf{u}_2$ を $\mathbf{e}_1$ に対して直交化し, $\mathbf{e}_2'$ を作る。

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{e}_1 = -\frac{2}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (21)$$

最後に $\mathbf{e}_2'$ を正規化すると,

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_2'}{\|\mathbf{e}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{140}} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (22)$$

となる。 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が $V^\perp$ の正規直交基底である。