# 2006 年度　線形代数 II　期末試験

- 大問題ごとに解答用紙を 1 枚使うこと。
- 解答用紙には，氏名，学籍番号，大問題の番号を記入すること。

**問題 1**

$\{1, e^x\cos x, e^x\sin x\}$ で張られる空間を $V$ とし，$V$ から $V$ への線形変換 $F$ を $F(f) = \frac{df}{dx}$（$f \in V$）と定義する。このとき，次の問に答えよ。

(1) $V$ の基底として $\{1, e^x\cos x, e^x\sin x\}$ を取るとき，$V$ の表現行列を求めよ。

(2) 小問 (1) で求めた行列を $A$ とするとき，$A\mathbf{v} = {}^t[0,1,0]$ を満たすベクトル $\mathbf{v}$ をすべて求めよ。

(3) 小問 (2) で求めたベクトルを $V$ の元に対応させることにより，不定積分 $\int e^x\cos x\,dx$ を求めよ。
（ヒント： $F$ の表現行列を $A$ とし，$f, g \in V$ に対応する数ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ とすると，
$F(f) = g \Leftrightarrow A\mathbf{v} = \mathbf{u}$ が成り立つ。）

**問題 2**

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を $xy$ 平面上の点とし，直線 $l$ を $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$（$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$）とする。また，$\mathbf{x}$ から直線 $l$ に下ろした垂線の足を $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\mathbf{x}$ から $\mathbf{x}'$ を求める写像は線形写像である。これを $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ と書くとき，行列 $A$ を求めよ。

(2) $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

(3) この写像の幾何学的意味を考えると，実は計算しなくても 2 本の固有ベクトルと対応する固有値を求めることができる。どのようにすればよいか述べよ。
（ヒント： 線形写像の固有ベクトルとは，写像によって方向が変わらず，大きさだけが変わるベクトルである。この場合，そのような方向は 2 つある。どんな方向か。）

**問題 3**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とするとき，次の問に答えよ。

(1) $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

(2) 正則行列 $P$，対角行列 $D$ によって $P^{-1}AP = D$ と対角化を行うとき，$P$，$D$ を求めよ。

(3) $n$ を正の整数とするとき，$A^n$ を計算せよ（$A^n$ の各要素を $n$ の関数として表せ）。