2006年度　線形代数II　期末試験解答

問題1

(1) 基底の各要素に対する F の作用を考えると，

$$\begin{aligned} F(1) &= 0 \quad (1)\\ F(e^x\cos x) &= e^x\cos x + (-1)e^x\sin x \quad (2)\\ F(e^x\sin x) &= e^x\sin x + e^x\cos x \quad (3)\end{aligned}$$

よって，F の表現行列は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(2)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (4)$$

とすると，

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ b+c \\ -b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

これを解くと，$b = c = \frac{1}{2}$，a は任意となる。よって，求めるベクトルは，a を任意定数として，

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

となる。

(3) 不定積分 $f(x) = \int e^x \cos x$ を求めるには，$\frac{df}{dx} = e^x \cos x$ を満たす関数 $f(x)$ を求めればよい。問題に示されたように V に基底を取り，V の要素と線形変換 F をそれぞれ $\mathbf{R}^3$ のベクトルと 3×3 行列に移して考えると，これは $A\mathbf{v} = {}^t[0,1,0]$ を満たすベクトル $\mathbf{v}$ を求める問題になる。小問 (2) の結果より，その答は $\mathbf{v} = {}^t[a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$。これは V の要素 $a + \frac{1}{2}\left(e^x\cos x + e^x \sin x\right)$（$a$ は任意定数）に対応する。これが積分の答である。

問題 2

(1) 直線 l 方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

である。$\mathbf{x}$ と $\mathbf{e}$ のなす角を ϕ とすると，垂線の足の定義より，$\mathbf{x}'$ は長さが $\|\,\mathbf{x}\,\|\cos\phi$ で方向が $\mathbf{e}$ と同じベクトルであるから，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \|\,\mathbf{x}\,\|\cos\phi\,\mathbf{e} \\
&= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} \\
&= \begin{bmatrix} \left(x\cos\frac{\theta}{2} + y\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2} \\ \left(x\cos\frac{\theta}{2} + y\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (8)
\end{aligned}$$

よって，

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}
\det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - \cos^2\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \lambda - \sin^2\frac{\theta}{2} \end{vmatrix} \\
&= \left(\lambda - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\lambda - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \\
&= \lambda^2 - \lambda \\
&= \lambda(\lambda - 1) \qquad (10)
\end{aligned}$$

であるから，A の固有値は 0 と 1 である。

$\lambda = 0$ に対応する正規化された固有ベクトル $\mathbf{v}_0$ は，$A\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ を解いて，

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

となる。同様に，$\lambda = 1$ に対応する正規化された固有ベクトル $\mathbf{v}_1$ は，$(A - E)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ を解いて，

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

となる（固有ベクトルは，正規化していなくても正解）。

(3) 点 $\mathbf{x}$ が直線 l 上にあるとき，垂線の足は $\mathbf{x}$ 自身であるから，$A\mathbf{x} = \mathbf{x}$。これは，$\mathbf{x}$ が A の固有値 1 に対する固有ベクトルであることを示す。よって固有ベクトルの 1 つは直線 l の方向ベクトルで，対応する固有値は 1 である。

一方，点 $\mathbf{x}$ が l と直交し，原点を通る直線 m 上にあるとき，垂線の足は原点であるから，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$。これは，$\mathbf{x}$ が A の固有値 0 に対する固有ベクトルであることを示す。よって固有ベクトルのもう 1 つは直線 m の方向ベクトルで，対応する固有値は 0 である。

以上の考察により求めた固有値・固有ベクトルは，もちろん小問 (2) で求めた結果と一致する。

問題 3

(1)

$$\begin{aligned}\det(\lambda E - A) &= \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2) + 4\cdot(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6+4) \\ &= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2). \end{aligned} \tag{13}$$

よって固有値は $\lambda = 1, -1, 2$ である。
固有値 1 に属する固有ベクトルを $\mathbf{x} =^t [x_1, x_2, x_3]$ とすると，

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ -4 & 1 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

これを解くと,（定数倍の任意性はあるが）$\mathbf{x} =^t [2, -1, -3]$ となる。
同様にして，固有値-1 に属する固有ベクトルは ${}^t[1, 0, -4]$，固有値 2 に属する固有ベクトルは ${}^t[1, 0, -1]$ となる。

(2) 固有値がすべて異なるから，A は固有ベクトルを横に並べた行列 P によって対角化でき，そのとき対角行列 D の対角成分には固有値が（固有ベクトルと同じ順番で）並ぶ。したがって，

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

となる。

(3) $P^{-1}AP = D$ より，$A = PDP^{-1}$。そこで，P^{-1} を計算すると，

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-1)^n + 4\cdot 2^n & -6 + (-1)^n + 5\cdot 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ 0 & 3 & 0 \\ 4(-1)^n - 4\cdot 2^n & 9 - 4(-1)^n - 5\cdot 2^n & 4(-1)^n - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

となる。