

2006年度 線形代数II 演習問題(第1回)

- レポートではなく自習用の演習問題なので、解答を提出する必要はありません。
- 解答は、来週中に線形代数IIのホームページに掲載します。

問題1

次の集合は線形空間か。そうであれば、そのことを証明せよ。そうでなければ、その理由を述べよ。

- (1) 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ で $\int_a^b f(x) dx = 0$ を満たすものの集合 F_1 。
- (2) 区間 $[a, b]$ で定義された2階微分可能な関数 $f(x)$ で、 $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$ ($a \leq x \leq b$) を満たすものの集合 F_2 。
- (3) 区間 $[a, b]$ で定義された2階微分可能な関数 $f(x)$ で、 $f''(x) + \{f(x)\}^2 = 0$ ($a \leq x \leq b$) を満たすものの集合 F_3 。
- (4) ある実数 a, b を用いて $f(x) = a \sin(x + b)$ と書ける関数の集合 F_4 。
(ヒント: $f_1, f_2 \in F_4$ のとき、 $f_1 + f_2$ を三角関数の加法定理を使って変形してみよ。)
- (5) $m \times n$ 行列 A に対し、 $Ax = 0$ を満たすベクトル x の集合 V_1 。
- (6) $m \times n$ 行列 A に対し、あるベクトル x を用いて $y = Ax$ と書けるベクトル y の集合 V_2 。

問題2

次の線形空間において、与えられた要素の組が1次独立かどうか調べよ。

- (1) $[0, 2\pi]$ で定義された関数の空間における3つの要素 $\sin x, \sin(x + \frac{\pi}{4}), \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 。
- (2) $\mathbf{R}[x]_2$ における3つの要素 $x^2 + x + 1, x^2 + 2x + 3, x^2 + 3x + 4$ 。
- (2) $\mathbf{R}[x]_2$ における3つの要素 $x^2 + x + 1, x^2 + 2x + 3, x^2 + 3x + 5$ 。

問題3

次の線形空間において基底を1組求め、空間の次元を求めよ。

- (1) 漸化式 $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす数列の空間。
- (2) 4×4 の交代行列の空間。
- (3) 2×4 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

に対し、 $Ax = 0$ を満たす4次元ベクトルの空間。

問題4

任意の2次以下の多項式 $f(x)$ に対し、 $f(x)$ を問題2(2)の3個の多項式の線形結合として表したときの係数を(順に) a, b, c とする。これにより、 $\mathbf{R}[x]_2$ の任意の元 $f(x)$ は \mathbf{R}^3 の元 ${}^t[a, b, c]$ に対応付けられる。このとき、 $1, x, x^2$ はそれぞれ \mathbf{R}^3 のどのような元に対応付けられるか。