

## 2006 年度 線形代数 II 演習問題 ( 第 3 回 )

- レポートではなく自習用の演習問題なので，解答を提出する必要はありません。
- 解答は，来週中に線形代数 II のホームページに掲載します。

### 問題 1

(1)  $\mathbf{R}^3$  に属する 3 本のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

を，演習問題 ( 第 2 回 ) の問題 1 (1) で定義した内積に対し，グラム・シュミットの方法により正規直交化せよ。

(2)  $1, x, x^2$  を，演習問題 ( 第 2 回 ) の問題 1 (2) で定義した内積に対し，グラム・シュミットの方法により正規直交化せよ ( これにより得られる多項式を Laguerre ( ラゲル ) 多項式と呼ぶ ) 。

### 問題 2

グラム・シュミットの直交化で出てくる中間段階のベクトル

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_k) \mathbf{e}_i \quad (2)$$

が，それまでに求めたベクトル  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$  のすべてと直交することを示せ。( ヒント： 上式を用いて実際に  $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}'_k)$  を計算し， $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{k-1}$  が互いに直交することを用いる。 )

### 問題 3

(1)  $\mathbf{R}^3$  に属する 3 本のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

を通常の内積に対し，グラム・シュミットの方法により正規直交化せよ。

(2) 次の行列を QR 分解せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$