2006 年度　線形代数 II　第 2 回レポート課題

2007 年 1 月 12 日（金）の授業終了時に提出してください。それ以前に提出する場合は工学部 3 号館 305 号室までお願いします。

問題 1

$\mathbf{R}[x]_3$ から $\mathbf{R}[x]_3$ への変換 F を，$F(f) = x\frac{df}{dx} - 2f$（$f \in \mathbf{R}[x]_3$）と定義する。たとえば $x^3 \in \mathbf{R}[x]_3$ に対し，$F(x^3) = x\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 2 \cdot x^3 = 3x^3 - 2x^3 = x^3$ である。このとき次の問に答えよ。

(1) F は線形変換であることを示せ。

(2) $\mathbf{R}[x]_3$ の基底として $\{1, x, x^2, x^3\}$ を取るとき，F の表現行列を求めよ。

(3) 小問 (2) で求めた表現行列を A とするとき，$A\mathbf{v} = 0$ を満たすベクトル $\mathbf{v}$ をすべて求めよ。

(4) 小問 (3) で求めたベクトルを $\mathbf{R}[x]_3$ の元に対応させることにより，変換 F の核空間 $\mathrm{Ker}\ F$ を求めよ。（ヒント： F の表現行列を A，f に対応する数ベクトルを $\mathbf{v}$ とするとき，$A\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(f) = 0$ が成り立つ。）

問題 2

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ による xy 平面上の変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ について考える。

(1) この変換が直交変換となるための必要十分条件は

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \tag{1}$$

であることを示せ。
（ヒント： 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して $(A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ となるための条件を書き下せ。）

(2) 式 (1) の第 1 式より，$a = \cos\theta$，$c = \sin\theta$ とおける。また，第 2 式より，$b = \sin\theta'$，$d = \cos\theta'$ とおける。このとき，θ と θ' の関係を求め，A を $\cos\theta$，$\sin\theta$ のみで表せ。
（ヒント： 2 つの場合に場合分けをして考えよ。）

(3) 小問 (2) で求めた変換のうち，片方は行列式が -1 となる。この変換は，直線 $y = \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)x$ に関する折り返しであることを示せ。
（ヒント： 折り返しとなるための条件を，図を描いて考えよ。点 (x, y) と点 (x', y') とを結ぶ線分が直線 $y = \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)x$ に垂直であり，かつ，線分の中点がこの直線上にあればよい。）

問題 3

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ で張られる空間を V とし，V から V への線形変換 F を $F(f)(x) = f(x+c)$（$f \in V, 0 \le c < 2\pi$）と定義する。すなわち F は x を $x + c$ で置き換える変換である。次の問に答えよ。

(1) V の基底として $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ を取るとき，V の表現行列を求めよ。

(2) V における内積を，$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$（$f, g \in V$）と定義する。このとき，$F$ は直交変換となることを示せ。