2007年度　線形代数II　第1回レポート解答

問題1

集合 V が線形空間であることを示すには，教科書 P80 の定義 4.1 にある

- 任意の $u, v \in V$ に対して, $u + v \in V$
- 任意の $v \in V$ と任意のスカラー k に対して, $kv \in V$

が成り立つことを示せばよい.

(1) [線形空間の証明]

$f_1, f_2 \in F_1$とする．つまり, $f_1(1) = f_1(-1) = 0, f_2(1) = f_2(-1) = 0$ が成り立つとする.

- $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ とすると, $g(x)$ について

$$\begin{aligned} g(1) &= f_1(1) + f_2(1) = 0 \\ g(-1) &= f_1(-1) + f_2(-1) = 0 \end{aligned}$$

  が成り立つ．よって，$g(x) = f_1(x) + f_2(x) \in F_1$ となる.

- k を任意のスカラー とすると，$kf_1(x)$ について

$$\begin{aligned} kf_1(1) &= k \cdot 0 = 0 \\ kf_1(-1) &= k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

  が成り立つ．よって，$kf_1(x) \in F_1$となる.

以上より，F_1 は線形空間である.

[次元と基底]

任意の実数 a, b, c, d を用いて, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in F_1$ とおく.
$f(1) = f(-1) = 0$ の条件から

$$\left\{ \begin{array}{ccl} f(1) & = & a + b + c + d = 0 \\ f(-1) & = & -a + b - c + d = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} c = -a \\ d = -b \end{array} \right.$$

これより，$f(x)$ は任意の実数 s, t を用いて

$$f(x) = sx^3 + tx^2 - sx - t = s(x^3 - x) + t(x^2 - 1)$$

という形で書ける.
ここで，$x^3 - x, x^2 - 1$ が 1 次独立（$f(x) = 0$ となるのは $s = t = 0$ の場合のみ）なのは明らかである.
したがって，$\{x^3 - x, x^2 - 1\}$ は F_1の基底となる．また, $\dim F_1 = 2$ となる.

[補足]

当初 F_1を 3 次多項式の集合（※ 3 次以下ではなくて）としていたが，これでは F_1は線形空間とならない．足し算の結果で x^3の係数が 0 となり 3 次多項式でなくなってしまうことがあるからである.
（例：$f_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2, f_2(x) = -x^3 - x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad f_1(x) + f_2(x) = x^2 - 1$）

(2) **[線形空間の証明]**

$A_1, A_2 \in M_1$とする．つまり, $A_1B = BA_1, A_2B = BA_2$ が成り立つとする．

- $A_1 + A_2$について

$$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2)$$

  が成立する．よって，$A_1 + A_2 \in M_1$となる．

- k を任意のスカラー とすると，kA_1 について

$$(kA_1)B = k(A_1B) = k(BA_1) = B(kA_1)$$

  したがって，$kA_1 \in M_1$となる．

以上より，M_1 は線形空間である．

[次元と基底]

a, b, c, d を任意の実数として, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_1$とおく．
すると, AB, BA はそれぞれ

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

となる．ここで $AB = BA$ の条件より

$$\left\{\begin{array}{rcl} b & = & -c \\ -a & = & -d \\ d & = & a \\ -c & = & b \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcl} a & = & d \\ b & = & -c \end{array}\right.$$

これより A は任意定数 s, t を用いて

$$A = \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

という形で書ける．
ここで，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ が互いに 1 次独立なのは明らかである．
よって，この 2 つの行列は M_1 の基底となる．また，$\dim M_1 = 2$ となる．

(3) **[線形空間の証明]**

$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \in V_1$とする．つまり $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + y_1 + z_1 + w_1 & = & 0 \\ 3x_1 + y_1 + 2z_1 + 4w_1 & = & 0 \\ x_2 + y_2 + z_2 + w_2 & = & 0 \\ 3x_2 + y_2 + 2z_2 + 4w_2 & = & 0 \end{array}\right.$ が成り立つとする．

- $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \\ w_1 + w_2 \end{bmatrix}$ について

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) + (w_1 + w_2) \\ =& (x_1 + y_1 + z_1 + w_1) + (x_2 + y_2 + z_2 + w_2) \\ =& 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) + 4(w_1 + w_2) \\ =& (3x_1 + y_1 + 2z_1 + 4w_1) + (3x_2 + y_2 + 2z_2 + 4w_2) \\ =& 0 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V_1$ となる．

- k を k を任意のスカラーとすると，$k\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \\ kw_1 \end{bmatrix}$ について，

$$\begin{aligned} & kx_1 + ky_1 + kz_1 + kw_1 = k(x_1 + y_1 + z_1 + w_1) = 0 \\ & 3kx_1 + ky_1 + 2kz_1 + 4kw_1 = k(3x_1 + y_1 + 2z_1 + 4w_1) = 0 \end{aligned}$$

したがって，$k\boldsymbol{v_1} \in V_1$ となる．

以上より，V_1 は線形空間である．

[次元と基底]

x, y, z, w が満たすべき条件から，

$$\begin{cases} x + y + z + w &= 0 \\ 3x + y + 2z + 4w &= 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x &= -z - 3w \\ 2y &= -z + w \end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{v}$ は任意定数 s, t を用いて

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -s - 3t \\ -s + t \\ 2s \\ 2t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

の形で書ける．

ここで，$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ が互いに 1 次独立なのは明らかである．

よって，この 2 つのベクトルは V_1 の基底となる．また，$\dim V_1 = 2$ となる．

問題2

(1)

$$a(x^2+x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x^2+3x+2)=0 \quad \cdots(*)$$

を満たす，実数 a,b,c を求める．上式を整理すると，

$$(a+b+c)x^2+(a+2b+3c)x+(a+b+2c)=0$$

この式が 任意の x について成り立つためには,

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ a+2b+3c &= 0 \\ a+b+2c &= 0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，解が $a=b=c=0$ となる．
したがって，$(*)$ を満たすのは $a=b=c=0$ の場合のみなので，この 3 個の多項式は 1 次独立である．

※別解 教科書 P90,91 にあるロンスキー行列式を用いた解法について
$f_1(x)=x^2+x+1, f_2(x)=x^2+2x+1, f_3(x)=x^2+3x+2$ とする．
今回の問題において，ロンスキー行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) & f_3'(0) \\ f_1''(0) & f_2''(0) & f_3''(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

よって，ロンスキー行列式が 0 でないので，1 次独立である．

(2) 1 に対応する元を求めるには,

$$a(x^2+x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x^2+3x+2)=1$$

を満たす，a,b,c を計算すればよい．(1) と同様に x の次数ごとに整理すると，次の連立方程式が導出できる．

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ a+2b+3c &= 0 \\ a+b+2c &= 1 \end{cases}$$

これを解くと，$(a,b,c)=(1,-2,1)$．　よって，1 に対応する元は${}^t[1,-2,1]$ となる．
同様にして計算すると，x に対応する元は${}^t[-1,1,0]$, x^2に対応する元は${}^t[1,1,-1]$ となる．

問題3

(1) 問題 1 (3) の結果より，線形空間 V_1の任意の元$\boldsymbol{v}$は, s,t を任意定数として,

$$\boldsymbol{v}=s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -s-3t \\ -s+t \\ 2s \\ 2t \end{bmatrix} \quad \cdots(*)$$

の形で書ける．
求める正規直交基を $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ とすると,$\boldsymbol{v_1}$は $(*)$ の形のベクトルで$\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1} = 1$（長さが 1）を満たすものを自由に選ぶことができる．そこで,

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s = \frac{1}{\sqrt{6}}, t = 0)$$

とする．$\boldsymbol{v_2}$は,$\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = 0$ かつ$\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_2} = 1$ の条件から s, t を決定することで,

$$\boldsymbol{v_2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (s = \frac{1}{2\sqrt{30}}, t = -\frac{3}{2\sqrt{30}})$$

となる．

(2) V_1の直交補空間は, $V_1^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v_2} = 0\}$ である．

ただし，$\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ は (1) で求めた V_1 の正規直交基底である．ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ とおくと

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v_1} = 0 \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v_2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

が導かれる．ここから問題 1 (3) と同様の手順で計算を進めると，$\boldsymbol{x}$ が任意定数 s, t により

$$\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

という形で書けることが分かる．
$V_1^{\perp}$の正規直交基底を $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$ とすれば，(1) と同様の手順で,

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (s = 0, t = \frac{1}{\sqrt{6}})$$

$$\boldsymbol{u_2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (s = \frac{3}{2\sqrt{30}}, t = \frac{1}{2\sqrt{30}})$$

が求められる．

問題 4

(1) (f,g) が教科書の P78（複素数まで含めると P92）にある 4 つの性質を満たせば，内積であることが示せる．

[R1]

$$(f,g) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx = \int_0^\infty e^{-x} g(x)f(x)dx = (g,f)$$
$$\therefore (f,g) = (g,f)$$

[R2]

$$((f+g),h) = \int_0^\infty e^{-x}(f(x)+g(x))h(x)dx = \int_0^\infty e^{-x} f(x)h(x)dx + \int_0^\infty e^{-x} g(x)h(x)dx = (f,h)+(g,h)$$
$$\therefore ((f+g),h) = (f,h)+(g,h)$$

[R3]

k を任意のスカラーとする．

$$(kf,g) = \int_0^\infty e^{-x}(kf(x))g(x)dx = k\int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx = k(f,g)$$
$$(f,kg) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)(kg(x))dx = k\int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx = k(f,g)$$
$$\therefore (kf,g) = (f,kg) = k(f,g)$$

[R4]

$$(f,f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)f(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}(f(x))^2 dx \geq 0 \quad (\because e^{-x}(f(x))^2 \geq 0)$$

また

$$(f,f) = \int_0^\infty e^{-x}(f(x))^2 dx = 0 \quad \Longrightarrow e^{-x}(f(x))^2 = 0$$
$$\therefore f(x) = 0$$

まとめると，$(f,f) \geq 0$ で等号成立は $f=0$ の場合のみ

以上 R1 から R4 までを (f,g) は満たすので内積であると言える．

(2) 求める正規直交基底を $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x)\}$ とする．

[Step-1]

$$(1,1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1 \qquad \therefore f_0(x) = 1$$

[Step-2]

$$(f_0, x) = (1, x) = \int_0^\infty e^{-x}xdx = 1 \qquad \therefore \tilde{f}_1(x) = x - 1\cdot 1 = x - 1$$

$$(\tilde{f}_1, \tilde{f}_1) = (x-1, x-1) = \int_0^\infty e^{-x}(x-1)^2 xdx = 1 \quad \therefore f_1(x) = x - 1$$

[Step-3]

$$(f_0, x^2) = (1, x^2) = \int_0^\infty e^{-x}x^2dx = 2$$

$$(f_1, x^2) = (x-1, x^2) = \int_0^\infty e^{-x}(x-1)x^2dx = 4$$

$$\therefore \tilde{f}_2(x) = x^2 - 2\cdot 1 - 4(x-1) = x^2 - 4x + 2$$

$$\begin{aligned}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_2) &= (x^2 - 4x + 2, x^2 - 4x + 2) \\ &= \int_0^\infty e^{-x}(x^2 - 4x + 2)^2 xdx = 4 \qquad \therefore f_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)\end{aligned}$$

以上より求める正規直交基底は $\{1, x-1, \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)\}$

(補足) $\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$ の導出

n を任意の自然数としたときに

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^n = \frac{x^n}{e^x} = \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdots} = 0$$

である．よって部分積分を繰り返し用いれば,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx &= \left[-e^{-x}x^n\right]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx \\ &= n\left[-e^{-x}x^{n-1}\right]_0^\infty + +n(n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx \\ &\vdots \\ &= n!\int_0^\infty e^{-x}dx = n!\end{aligned}$$