2007年度　線形代数II　第2回レポート解答

問題1

(1)

線形変換 f の表現行列を A とすると，$A = E - 2\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u}$ となる．
f が直交変換であるためには，

$$\text{任意の}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\text{に対して}, f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

を満たす必要がある．ここで，教科書 P118 にあるように，

$$A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{y} = {}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tAA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}({}^tAA)\boldsymbol{y}$$

と変形できる．これより，${}^tAA = E$ つまり A が直交行列であることが示せればよい．
よって以下で A が直交行列であることを示す．

$$\begin{aligned}
{}^tAA &= {}^t(E - 2\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u})(E - 2\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u}) \\
&= (E - 2\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u})(E - 2\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u}) \\
&= E - 4\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{u}({}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}){}^t\boldsymbol{u} \\
&= E - 4\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u} + 4||\boldsymbol{u}||^2\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u} \\
&= E - 4\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u} \qquad (\because ||\boldsymbol{u}|| = 1) \\
&= E
\end{aligned}$$

これより A は直交行列である．したがって，f は直交変換である．

(2)

F が直交変換であるためには，

$$\text{任意の } f, g \in V, \alpha(0 \leq \alpha \leq 2\pi) \text{ に対して}, (F_\alpha(f), F_\alpha(g)) = (f, g)$$

を満たす必要がある．
ここで，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換をすると，

$$(f, g) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)g(r\cos\theta, r\sin\theta)rd\theta dr$$

となる．一方，

$$\begin{aligned}
x\cos\alpha - y\sin\alpha &= r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha = r\cos(\theta + \alpha) \\
x\sin\alpha + y\cos\alpha &= r\cos\theta\sin\alpha + r\sin\theta\cos\alpha = r\sin(\theta + \alpha)
\end{aligned}$$

となることを用いると，

$$(F_\alpha(f), F_\alpha(g)) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta + \alpha), r\sin(\theta + \alpha))g(r\cos(\theta + \alpha), r\sin(\theta + \alpha))rd\theta dr$$

ここで，$\theta + \alpha = \phi$ と変数変換をすると，

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_\alpha^{2\pi+\alpha} f(r\cos\phi, r\sin\phi) g(r\cos\phi, r\sin\phi) r d\phi dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi) g(r\cos\phi, r\sin\phi) r d\phi dr \\
&= (f, g)
\end{aligned}
$$

以上より，F は直交変換である．

問題２

(1)

平面 $x+y+z=0$ 上の任意のベクトルは，任意の実数 s,t を用いて $\begin{pmatrix} s \\ t \\ -s-t \end{pmatrix}$ と表すことができる．

$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて，$\boldsymbol{e_1}$ が平面に垂直，つまり平面上の任意のベクトルと垂直という条件から，

$$sx+ty+(-s-t)z=0 \quad \Longleftrightarrow \quad s(x-z)+t(y-z)=0$$

これが任意の s,t について成立するので，

$$x=y=z$$

さらに単位ベクトルであることを考慮すると，

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

一方，$\boldsymbol{e_2}$ は $t=0$ として，単位ベクトルになるように s を決めれば，

$$s^2+(-s)^2=1 \quad \Longrightarrow \quad s=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad \boldsymbol{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e_3}$は$\boldsymbol{e_2}$ との直交条件と単位ベクトルであることから，

$$\begin{cases} s+0\cdot t+-1\cdot(-s-t) &= 0 \\ s^2+t^2+(-s-t)^2 &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s &= \frac{1}{\sqrt{6}} \\ t &= -\frac{2}{\sqrt{6}}1 \end{cases} \quad \therefore \quad \boldsymbol{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[**注意**]
$\boldsymbol{e}_1$は上記のものに -1 をかけたベクトルでも構わない．また,$\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$にも任意性があり，上記のベクトルはその一例である．

(2)

$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{a'}$ を結ぶ線分の中点 $(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a'}}{2})$ は平面 $x+y+z=0$ 上にあるので，

$$\frac{\alpha+\alpha'}{2}+\frac{\beta+\beta'}{2}+\frac{\gamma+\gamma'}{2}=0$$

また，$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{a'}$ を結ぶ線分 $(\boldsymbol{a'}-\boldsymbol{a})$ は平面に垂直，つまり $\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ の両方と直交することから，

$$\begin{cases} \alpha'-\alpha-(\gamma'-\gamma) &= 0 \\ \alpha'-\alpha-2(\beta'-\beta)+\gamma'-\gamma &= 0 \end{cases}$$

以上を行列を用いて表すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

を両辺に左乗すると，

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

よって，

$$A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A\boldsymbol{e_1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e_1}$$

$$A\boldsymbol{e_2} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e_2}$$

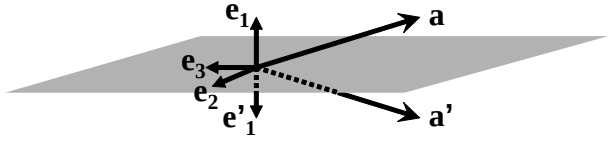
$$a\boldsymbol{e_3} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e_3}$$

以上より，$\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ は A の固有ベクトルであり，対応する固有値は順に $-1, 1, 1$.

[幾何学的な説明]

f は下図にあるように，$\boldsymbol{a}$を平面に対して鏡像の位置$\boldsymbol{a'}$ に移す写像（鏡像変換）である．

図から分かるように，平面に垂直なベクトル $(\boldsymbol{e}_1)$ は f によって，同じ大きさで逆向きのベクトル $(\boldsymbol{e'}_1 = -\boldsymbol{e}_1)$ になる．よって，$\boldsymbol{e}_1$は 固有値 -1 に対応する固有ベクトルになる．また，平面上のベクトル $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ は変化しないので，$\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 固有値 1 に対応する固有ベクトルになる．



問題３

行列 A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ は

$$\Phi_A(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda + 5 & -4 \\ 0 & 8 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

よって，A の固有値は $\lambda = 1, 3, -1$

- $\lambda = 1$ のとき

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = 0$$

これを解くと，$x =$ 任意の実数, $y = z = 0$ が得られる．よって求める固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 3$ のとき

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = 0$$

これを解くと，$2x = 2y = z$ が得られる．よって求める固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_{\lambda=3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$ のとき

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = 0$$

これを解くと，$x = -y = -z$ が得られる．よって求める固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_{\lambda=-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[**注意**] 上記の固有ベクトルに 0 でない定数をかけたベクトルも固有ベクトルとなる．