

2007 年度 線形代数 II 演習問題 (第 1 回) 解答

問題 1

(1) $f, g \in F_1$ とすると,

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = 0 \quad (1)$$

だから, $f+g \in F_1$ 。また,

$$\int_a^b (kf)(x) dx = \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx = 0 \quad (2)$$

だから $kf \in F_1$ 。よって F_1 は線形空間である。

(2) $f, g \in F_2$ とすると,

$$(f+g)''(x) + 3(f+g)'(x) + 2(f+g)(x) = f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) + g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = 0 \quad (3)$$

だから, $f+g \in F_2$ 。また,

$$(kf)''(x) + 3(kf)'(x) + 2(kf)(x) = k\{f''(x) + 3f'(x) + 2f(x)\} = 0 \quad (4)$$

だから, $kf \in F_2$ 。よって F_2 は線形空間である。

(3) $f \in F_3$ とするとき, $2f$ を考えると,

$$(2f)''(x) + \{(2f)(x)\}^2 = 2[f''(x) + \{f(x)\}^2] + 2\{f(x)\}^2 = 2\{f(x)\}^2 \quad (5)$$

となるが, 一般に $2\{f(x)\}^2 \neq 0$ であるから, $2f \notin F_3$ 。よって F_3 は線形空間でない。

(4) $f, g \in F_4$ とすると, ある実数 a, b, c, d により $f(x) = a \sin(x+b)$, $g(x) = c \sin(x+d)$ と書ける。このとき, 三角関数の加法定理を使うと,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= a(\sin x \cos b + \cos x \sin b) + c(\sin x \cos d + \cos x \sin d) \\ &= (a \cos b + c \cos d) \sin x + (a \sin b + c \sin d) \cos x \\ &= \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos(b-d)} (\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos(b-d)} \sin(x+\theta) \end{aligned} \quad (6)$$

と書ける。ここで, θ は

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a \cos b + c \cos d}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos(b-d)}}, \\ \sin \theta &= \frac{a \sin b + c \sin d}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos(b-d)}} \end{aligned} \quad (7)$$

を満たす実数である。これより, $f+g \in F_4$ 。また, $kf = (ka) \sin(x+b)$ だから, 明らかに $kf \in F_4$ 。よって F_4 は線形空間である。

(5) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$ とすると,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \\ A(k\mathbf{x}_1) &= kA\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

よって V_1 は線形空間である。

(6) $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_1$ とすると, ある $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が存在して $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$ と書ける。このとき,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 &= A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \\ k\mathbf{y}_1 &= kA\mathbf{x}_1 = A(k\mathbf{x}_1)\end{aligned}\tag{9}$$

であるから, $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ も $k\mathbf{y}_1$ も, あるベクトルに A をかけたベクトルとして表現できる。よって $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in V_2$ かつ $k\mathbf{y}_1 \in V_2$ 。したがって V_2 は線形空間である。

問題 2

(1) a, b, c を 3 つの実数とすると,

$$\begin{aligned}& a(x^2 + x + 1) + b(x^2 + 2x + 3) + c(x^2 + 3x + 5) \\ &= (a + b + c)x^2 + (a + 2b + 3c)x + (a + 3b + 5c)\end{aligned}\tag{10}$$

これが 0 に等しくなるには, $x^2, x, 1$ の係数のすべてが 0 になる必要がある。すなわち,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{11}$$

となる。これに対して行基本変形を行うと,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{13}$$

となる。この最後の方程式は, $b = -2c, a = c$ であれば成り立つので, $a = b = c = 0$ 以外の解を持つ。よって 1 次独立性の定義より, これらの要素は 1 次独立でない。

(2) 前問と同様にして a, b, c に対する連立 1 次方程式を立てると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{14}$$

ここで, 係数行列の行列式を計算してみると -1 となるので, 逆行列が存在する。そこで, 逆行列を上式の両辺にかけると, $a = b = c = 0$ が導ける。よって 1 次独立性の定義より, これらは 1 次独立である。

(3) 1 次独立性の定義より,

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0},\tag{15}$$

すなわち,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{16}$$

を満たすすべてが 0 ではない x, y, z が存在するかどうかを調べればよい。ここで、係数行列の行列式を計算してみると 3 となるので、逆行列が存在する。そこで、逆行列を上式の両辺にかけると、 $x = y = z = 0$ が導ける。よって、これらは 1 次独立である。

(4) 前問と同様にして連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

を立て、小問 (1) と同様にして係数行列の行基本変形を行うと、たとえば $x = 1, y = 1, z = -1$ という解が存在することがわかる。よって、これらは 1 次独立ではない。別解として、 $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ であることに気づけば、1 次独立ではないことが直ちにわかる。

(5) $a + b = c$ (“+”は数列の各項どうしの和を取って新しい数列を作る演算を表す) が成り立っているから、この 3 つの要素は 1 次独立ではない。

(6) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ であるから、

$$\sin x - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (18)$$

が成り立つ。よってこれらは 1 次独立でない。

問題 3

(1) 条件を満たす 2 次以下の多項式を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと、 $f(1) = a + b + c = 0$ より、 $c = -a - b$ とおける。よって、条件を満たす任意の 2 次以下の多項式は $f(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$ と書ける。また、 $(x - 1)^2$ と $x - 1$ は明らかに 1 次独立である。よって、 $\{(x - 1)^2, x - 1\}$ は基底であり、この空間の次元は 2 である。

注 基底の取り方は 1 通りではない。実際、上記で $a + b + c = 0$ より $a = -b - c$ として a を消去することもでき、そうすると条件を満たす任意の $f(x)$ を $f(x) = (-b - c)x^2 + bx + c = -b(x^2 - x) - c(x^2 - 1)$ と書ける。これより、 $\{x^2 - x, x^2 - 1\}$ も基底であることがわかる。このように、基底の取り方には任意性があるが、**基底を構成する要素の数、すなわち次元は、基底の取り方によらず一意的に定まる。** 以下の例題でも同様である。

(2) この空間に属する数列は、最初の 3 項を定めれば、あとの項は漸化式により自動的に定まる。いま、 $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$ を満たす数列 $\{a_n\}$, $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$ を満たす数列 $\{b_n\}$, $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1$ を満たす数列 $\{c_n\}$ を考えると、これらは明らかに 1 次独立である。また、漸化式を満たす任意の数列を $\{x_n\}$ とし、 $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma$ とすると、数列 $\{\alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n\}$ は漸化式を満たし、最初の 3 項が $\{x_n\}$ と同じであるから、 $\{x_n\}$ と等しい。したがって、 $\{x_n\}$ は $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の線形結合で表せる。これより、 $\{\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}\}$ は基底である。空間の次元は 3 である。

(3) 4×4 の任意の交代行列 A は、6 個の実数 a, b, c, d, e, f を用いて

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

と書ける。そこで、6 個の交代行列

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

を考えると、これらは明らかに 1 次独立である ($aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 = 0$ となるのは、 $a = b = c = d = e = f = 0$ のときのみ)。さらに、式 (19) より、任意の交代行列 A は $A = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6$ と書ける。よって、 $\{E_1, E_2, \dots, E_6\}$ は基底である。空間の次元は 6 である。

(4) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に対して行基本変形を行うと、

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \quad (21)$$

よって、この連立 1 次方程式の一般解は $x_1 = s + 2t$, $x_2 = -2s - 3t$, $x_3 = s$, $x_4 = t$ (s, t は任意定数) で与えられる。これを列ベクトルの形に整理すると、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

となる。そこで、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

とおくと、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は明らかに 1 次独立であり、これらが基底である。空間の次元は 2 次元である。

問題 4 まず x^2 について考える。 x^2 を問題 2(2) の 3 個の多項式の線形結合として表すと、

$$\begin{aligned} & a(x^2 + x + 1) + b(x^2 + 2x + 3) + c(x^2 + 3x + 4) \\ &= (a + b + c)x^2 + (a + 2b + 3c)x + (a + 3b + 4c) = x^2 \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 x の各次数の項の係数を比較することにより、 a, b, c について次の連立 1 次方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

これを解くと、 $a = 1, b = 1, c = -1$ 。よって、 x^2 は $\mathbf{R}^3$ の元

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

に対応付けられる。

同様にして、 $x, 1$ はそれぞれ数ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

に対応付けられる。