

2007 年度 線形代数 II 演習問題 (第 2 回) 解答

問題 1

(1) (R1) ~ (R4) が成り立つことは以下のようにして示せる。

(R1)

$$(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = {}^t \mathbf{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{a} = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} {}^t \mathbf{b} = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (1)$$

(R2)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= ({}^t \mathbf{a}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{b} + {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (2)$$

$(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b})$ も同様にして示せる。

(R3) k を任意のスカラーとすると ,

$$(\mathbf{a}, k\mathbf{b}) = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (k\mathbf{b}) = k {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{b} = k(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (3)$$

(R4) $\mathbf{a} = {}^t (a_1, a_2, a_3)$ とすると ,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{a} = a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 \geq 0. \quad (4)$$

また , $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ となるのは $a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 = 0$, すなわち $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ のとき , つまり $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときに限る。

(2) (R1) ~ (R4) が成り立つことは以下のようにして示せる。

(R1) トレースは対角要素の和であり , 正方行列の場合 , 転置した行列の対角要素は元の行列の対角要素に等しいから

$$(B, A) = \text{Tr}({}^t B A) = \text{Tr}({}^t ({}^t B A)) = \text{Tr}({}^t A B) = (A, B) \quad (5)$$

(R2) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ (教科書 p. 7) より ,

$$\begin{aligned} (A, B + C) &= \text{Tr}({}^t A (B + C)) = \text{Tr}({}^t A B + {}^t A C) = \text{Tr}({}^t A B) + \text{Tr}({}^t A C) \\ &= (A, B) + (A, C) \end{aligned} \quad (6)$$

$(A + C, B) = (A, B) + (C, B)$ も同様にして示せる。

(R3) k を任意のスカラーとすると , $\text{Tr}(kA) = k \text{Tr}(A)$ (教科書 p. 7) であるから ,

$$(A, kB) = \text{Tr}({}^t A (kB)) = \text{Tr}(k {}^t A B) = k \text{Tr}({}^t A B) = k(A, B) \quad (7)$$

(R4) トレースが対角要素の和であることと，行列の積の公式より，

$$(A, A) = \text{Tr}(^tAA) = \sum_{i=1}^2 (^tAA)_{ii} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ki}a_{ki} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0 \quad (8)$$

$(A, A) = 0$ となるのは $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ のとき，すなわち $A = O$ のときのみである。

問題 2

(1) $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$ とするとき，これらが正規直交系の定義

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \quad (9)$$

を満たすことを示せばよい。実際に計算してみると，

$$(f_0, f_0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx = 1, \quad (10)$$

$$(f_0, f_1) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \quad (11)$$

となり，これらについては式 (9) を満たしていることがわかる。他の組み合わせにしても，同様に式 (9) を満たすことが示せるので，与えられた関数の集合は正規直交系である。

(2) $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx$ ($j = 1, 2, \dots, m$) とするとき，これらが正規直交系の定義 (9) を満たすことを示す。ただし， $(f_i, f_j) = (f_j, f_i)$ であるから， $i \leq j$ の場合のみを考えればよい。まず， $(f_0, f_0) = 1$ は式 (10) で既に示した。次に， $1 \leq j \leq m$ を満たす任意の j に対し，

$$\begin{aligned} (f_0, f_j) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos jx dx = 0, \\ (f_j, f_j) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cos^2 jx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2jx) \right\} dx = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つ。そこで，あとは $1 \leq j < k \leq m$ を満たす j, k に対して $(f_j, f_k) = 0$ を示せばよい。このため，三角関数の積を和に直す公式

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \} \quad (13)$$

を用いると，

$$(f_j, f_k) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \cos((j+k)x) + \cos((j-k)x) \} dx = 0 \quad (14)$$

ここで，任意の 0 でない整数 n に対して $\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$ であることを用いた。以上より，すべての場合について式 (9) が成り立つので，与えられた関数の集合は正規直交系である。

問題 3

- (1) まず, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ の場合を考える。シュワルツの不等式の証明では, 次の恒等式

$$\|t\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \left(t - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right)^2 + \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \{ \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \} \quad (15)$$

を導き, 左辺が非負であることから, t の 2 次関数である右辺の最小値が非負であること, すなわち

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \{ \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \} \geq 0 \quad (16)$$

を導いた。いま, シュワルツの不等式で等号が成り立つ場合とは,

$$\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = 0 \quad (17)$$

が成り立つ場合だから, これは右辺の 2 次関数の最小値が 0 となる場合である。これはすなわち, 左辺がある t に対して 0 となるとき, すなわち, $t\mathbf{a} = \mathbf{b}$ となる t が存在する場合である。一方, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ の場合には, 式 (17) は常に成り立つ。以上より, シュワルツの不等式の等号が成り立つ場合とは, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であるときか, $\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}$ の定数倍となるときであることがわかる。

- (2) 両辺は非負だから, 右辺の 2 乗から左辺の 2 乗を引いて 0 以上となることを示せばよい。内積とノルムの関係 $\|x\|^2 = (x, x)$ を使って計算すると,

$$\begin{aligned} (\|x\| + \|y\|)^2 - \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 - (x + y, x + y) \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 - \{ \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \} \\ &= 2\{ \|x\|\|y\| - (x, y) \} \geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, 最後の不等式ではシュワルツの不等式を用いた。以上より, 与えられた不等式が成り立つ。なお, この不等式は x, y が幾何ベクトルの場合, 三角形の 2 辺の和が他の 1 辺よりも長いことを意味するので, 三角不等式と呼ばれる。