

2007 年度 線形代数 II 中間試験

- 大問題ごとに解答用紙を 1 枚使うこと。
- 解答用紙には、氏名、学籍番号、大問題の番号を記入すること。

問題 1

実数を係数とする 2 次以下の多項式のなす空間を $\mathbf{R}[x]_2$ とする。また、 $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ とし、 $f, g \in \mathbf{R}[x]_2$ に対して、スカラー (f, g) を以下の小問 (1) あるいは (2) のように定義する。それぞれの場合において、 (f, g) は $\mathbf{R}[x]_2$ の内積となるか。内積となる場合は、そのことを示せ。内積とならない場合は、その理由を述べよ。

(1) $(f, g) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)g(x_i)$ と定義する場合。

(2) $(f, g) = \sum_{i=1}^2 f(x_i)g(x_i)$ と定義する場合。

問題 2

(1) $\mathbf{R}^3$ に属する 3 本のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

を通常の内積に対し、グラム・シュミットの方法により正規直交化せよ。

(2) 次の行列を QR 分解せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 3

実数を係数とする 2 次以下の多項式のなす空間を $\mathbf{R}[x]_2$ とする。このとき、微分方程式

$$\frac{1}{2}x(x-2)\frac{d^2f(x)}{dx^2} - (x-1)\frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0 \quad (1)$$

の $\mathbf{R}[x]_2$ における解を、次の手順で求めよ。

(1) $f \in \mathbf{R}[x]_2$ に対して $\frac{1}{2}x(x-2)\frac{d^2f(x)}{dx^2} - (x-1)\frac{df(x)}{dx} + f(x)$ を対応させる写像を F とすると、 F は $\mathbf{R}[x]_2$ から $\mathbf{R}[x]_2$ 自身への線形写像である。 $\mathbf{R}[x]_2$ の基底を $\{1, x, x^2\}$ とするとき、 F の表現行列 A を求めよ。

(2) $N_A = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \mid A\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$ とする。 N_A の基底を 1 組求めよ。

(3) $N_F = \{f \in \mathbf{R}[x]_2 \mid F(f) = 0\}$ とする。小問 (2) の結果を用いて N_F の基底を 1 組求めよ。

(4) N_F の任意の要素を、パラメータを含む式で表せ。

(5) 小問 (4) で求めた式を微分方程式 (1) に代入し、解となっていることを示せ。