

2007 年度 線形代数 II 中間試験解答

問題 1

(1) (f, g) は内積の満たすべき性質 (R1) ~ (R4) を満たす。実際、定義に従って計算すると、

$$(R1) \quad (f, g) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)g(x_i) = \sum_{i=0}^2 g(x_i)f(x_i) = (g, f) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R2) \quad (f + g, h) = \sum_{i=0}^2 \{f(x_i) + g(x_i)\} h(x_i) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)h(x_i) + \sum_{i=0}^2 g(x_i)h(x_i) = (f, h) + (g, h) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R3) \quad k \text{ をスカラーとすると、} (kf, g) = \sum_{i=0}^2 \{kf(x_i)\} g(x_i) = k \sum_{i=0}^2 f(x_i)g(x_i) = k(f, g) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R4) \quad f \in \mathbf{R}[x]_2 \text{ とし、} f(x) = ax^2 + bx + c \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} (f, f) &= \sum_{i=0}^2 \{f(x_i)\}^2 \\ &= \{f(-1)\}^2 + \{f(0)\}^2 + \{f(1)\}^2 \\ &= (a - b + c)^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

また、

$$\begin{aligned} (f, f) = 0 &\Leftrightarrow a - b + c = 0 \quad \text{かつ} \quad c = 0 \quad \text{かつ} \quad a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

よって (R4) も成り立つ。

以上より、 (f, g) は $\mathbf{R}[x]_2$ の内積である。

(2) 小問 (1) と同様に計算すると、 (f, g) は内積の満たすべき性質 (R1) ~ (R3) を満たす。また、(R4) の前半も満たす。すなわち、任意の $f \in \mathbf{R}[x]_2$ に対して $(f, f) \geq 0$ が成り立つ。

しかし、(R4) の後半、すなわち「 $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ 」は成り立たない。実際、 $f(0) = f(1) = 0$ となる $\mathbf{R}[x]_2$ の 0 でない要素、たとえば $f(x) = x(x-1)$ を考えると、 $(f, f) = 0$ となる。したがって、本小問で定義した (f, g) は $\mathbf{R}[x]_2$ の内積ではない。

問題 2

(1) 与えられたベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とおくと,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}'_2}{\|\mathbf{e}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}'_3}{\|\mathbf{e}'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が正規直交化したベクトルである。

(2) 与えられた行列の列は小問 (1) の $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ であるから, (1) のグラム・シュミットの直交化の結果を利用できる。QR 分解の公式より,

$$Q = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$R = \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3) \\ 0 & \|\mathbf{e}'_2\| & (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3) \\ 0 & 0 & \|\mathbf{e}'_3\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる。なお, 積 QR を計算すると, 実際に元の行列になっているの確かめることができる。

問題 3

(1) 基底の要素 $1, x, x^2$ に対する F の作用を求めると,

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ F(x) &= -(x-1) + x = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ F(x^2) &= \frac{1}{2}x(x-2) \cdot 2 - (x-1) \cdot 2x + x^2 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{aligned} \quad (6)$$

したがって,

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる。

(2) $\mathbf{u} = {}^t[u_0, u_1, u_2]$ とおくと,

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow u_0 + u_1 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

よって, u_0, u_2 を任意の数とすると, N_A の任意の元は ${}^t[u_0, -u_0, u_2]$ と書ける。したがって, たとえば,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

が基底である。

(3) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対応する $\mathbf{R}[x]_2$ の元は, それぞれ $1 - x, x^2$ である。これらが N_F の基底である。

(4) N_F の任意の元は, 小問 (3) で求めた基底の線形結合となるから, 2 つの任意パラメータ a, b を用いて $a(1 - x) + bx^2$ と書ける。

(5) 小問 (4) で求めた式に F を作用させ, 0 になることを確かめればよい。

$$\begin{aligned} F(a(1 - x) + bx^2) &= \frac{1}{2}x(x - 2) \cdot 2b - (x - 1) \cdot (-a + 2bx) + (a - ax + bx^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

したがって, 小問 (4) で求めた式は微分方程式の解となっている。