

2007 年度 線形代数 II 期末試験

- 大問題ごとに解答用紙を 1 枚使うこと。
- 解答用紙には、氏名、学籍番号、大問題の番号を記入すること。

問題 1

$\alpha > 1$ を定数とし、区間 $[\frac{1}{\alpha}, \alpha]$ で定義された積分可能な関数 $f(x)$ のなす線形空間を X_α とする。また、 $f, g \in X_\alpha$ に対し、内積 (f, g) を

$$(f, g) = \int_{1/\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) \cdot \frac{1}{x} dx \quad (1)$$

で定義する。いま、 X_α から X_α への線形変換 F を

$$(F(f))(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

と定義すると、 F は X_α の直交変換となることを示せ。

問題 2

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ (複素数を要素とする n 次元ベクトル空間) の内積を

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \quad (3)$$

と定義する。ただし、上付きバーは複素共役を表し、 $\mathbf{x}^* = {}^t \bar{\mathbf{x}}$ である。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、 $(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、 $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\lambda} (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つことを示せ。
- (2) 任意の $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($n \times n$ 複素行列) に対し、 $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A^* \mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つことを示せ。ただし、 $A^* = {}^t \bar{A}$ である。
- (3) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ をエルミート行列 ($A^* = A$ となる行列) とする。このとき、 A の固有値はすべて実数であることを示せ。
- (4) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ をエルミート行列とし、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は A の異なる固有値に対する固有ベクトルとする。このとき、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は上記の内積に対して直交することを示せ。

問題 3

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2b+3 & b \\ 0 & -2b & b+3 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ。

- (1) A のすべての固有値を求めよ。
- (2) A の固有値がすべて相異なるためには， b がどのような条件を満たせばよいか。また，このとき，各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。
- (3) A の固有ベクトルのうち 1 次独立なものが 2 本しか存在しないのは， b がどんな値のときか。また，このとき 2 本の 1 次独立な固有ベクトルを求めよ。
- (4) A の固有ベクトルが一意的に定まらないのは， b がどんな値のときか。また，このとき 1 次独立な固有ベクトルを 3 本求めよ。
(ヒント：ある固有値に対する固有ベクトルは 2 次元の線形空間となるので，その任意の基底を求めることで，1 次独立な固有ベクトルが 2 本求まる。)