2007 年度　線形代数 II　期末試験解答

問題 1

F が直交変換であることを示すには，任意の $f, g \in X_\alpha$ に対して

$$(F(f), F(g)) = (f, g) \tag{1}$$

となることを示せばよい。実際に計算してみると，

$$\begin{aligned}(F(f), F(g)) &= \int_{1/\alpha}^{\alpha} f\left(\frac{1}{x}\right) g\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \int_{\alpha}^{1/\alpha} f(y)g(y) \cdot y \cdot \left(-\frac{dy}{y^2}\right) \\ &= \int_{1/\alpha}^{\alpha} f(y)g(y) \cdot \frac{1}{y}\, dy \\ &= (f, g) \end{aligned} \tag{2}$$

となる。よって，F は直交変換である。

問題 2

(1) 任意の複素数 α に対して $(\alpha\mathbf{x})^* = \bar{\alpha}\mathbf{x}^*$ であることを用いると，

$$(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{3}$$

$$(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^*\mathbf{y} = \bar{\lambda}\mathbf{x}^*\mathbf{y} = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{4}$$

となる。

別解　成分で書き下して計算を行うと，内積の定義より，

$$(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i(\lambda y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{5}$$

$$(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{(\lambda x_i)}(y_i) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{6}$$

となる。

(2) $(A\mathbf{x})^* = \mathbf{x}^* A^*$ と $(A^*)^* = A$ を用いると，

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*(A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}^* A)\mathbf{y} = (A^*\mathbf{x})^*\mathbf{y} = (A^*\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{7}$$

となる。

別解　成分で書き下して計算を行うと，内積の定義および A^* の定義より，

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i (A\mathbf{y})_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_i \right)_j} y_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{(A^* \mathbf{x})_j}\, y_j \\
&= (A^*\mathbf{x}, \mathbf{y}). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となる。

(3) A の任意の固有値を λ，対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とする。$A^* = A$ であることを用い，$(\mathbf{x}, A\mathbf{x})$ を 2 通りの方法で計算する。

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda \parallel \mathbf{x} \parallel^2, \qquad (9)$$

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (A^*\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda} \parallel \mathbf{x} \parallel^2 . \qquad (10)$$

$\parallel \mathbf{x} \parallel^2 \neq 0$ だから，$\bar{\lambda} = \lambda$。よって λ は実数である。

(4) $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，$A\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$ とし，$\lambda \neq \mu$ とする。小問 (3) より，λ，μ は実数である。このとき，$(\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ を 2 通りの方法で計算する。

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mu\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (11)$$

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A^*\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \qquad (12)$$

$\lambda \neq \mu$ より，$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$。よって，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交する。

問題 3

(1) λ が A の固有値となる条件は，

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda + 2b - 3 & -b \\ 0 & 2b & \lambda - b - 3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 1)(\lambda + 2b - 3)(\lambda - b - 3) + (\lambda - 1) \cdot 2b^2 \\
&= (\lambda - 1)\left\{\lambda^2 + (b - 6)\lambda - 3(b - 3)\right\} \\
&= (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + b - 3) = 0. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

よって，固有値は，

$$\lambda = 1,\ 3,\ -b + 3 \qquad (14)$$

となる。

(2) 小問 (1) の結果より，A の固有値がすべて相異なるための条件は $b \neq 0,\ 2$ である。このとき，各固有値に対する固有ベクトルは次のように求められる。

(i) $\lambda = 1$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，$(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2b-2 & -b \\ 0 & 2b & -b-2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

ここで，第 1 式より，$2y = 0$ だから $y = 0$。これを第 2 式に代入して，$bz = 0$。いま，$b \neq 0$ だから，$z = 0$。このとき，第 3 式は自動的に満たされる。一方，x は式に出てこないから，任意でよい。よって，$x = 1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[1, 0, 0]$ となる。

(ii) $\lambda = 3$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，$(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2b & -b \\ 0 & 2b & -b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

ここで，第 1 式より $x = y$。また，$b \neq 0$ であるから，第 2 式より $z = 2y$。よって，$y = 1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[1, 1, 2]$ となる。

(iii) $\lambda = -b + 3$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，$(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} -b+2 & -2 & 0 \\ 0 & b & -b \\ 0 & 2b & -2b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

ここで，$b \neq 2$ だから第 1 式より $2y = (-b+2)x$。また，$b \neq 0$ だから第 2 式より $z = y$。よって，$x = 2$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[2, -b+2, -b+2]$ となる。

(3) 固有値がすべて相異なるとき，それらに対応する固有ベクトルは 1 次独立だから，1 次独立な固有ベクトルは 3 本存在する。したがって，1 次独立な固有ベクトルが 2 本しか存在しないのは，A の固有値が重根となるときに限られる。ここで，$b = 0$ のときは，次問で見る通り，1 次独立な固有ベクトルを 3 本求めることができる。一方，$b = 2$ のときは，固有値は $\lambda = 1$（重根），$\lambda = 3$（単根）で，それぞれに対する固有ベクトルは次のようになる。

(i) $\lambda = 1$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，前小問の (i) と同様にして，

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

ここで，第 1 式より，$2y = 0$ だから $y = 0$。これを第 2 式に代入して，$z = 0$。一方，x は式に出てこないから，任意でよい。よって，$x = 1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[1, 0, 0]$ となる。固有値は重根だが，固有ベクトルは 1 本しか求まらないことに注意する。

(ii) $\lambda = 3$ のとき： 前小問の (ii) と同様にして，固有ベクトルは ${}^t[1, 1, 2]$ となる。

以上より，1 次独立な固有ベクトルが 2 本しか存在しないのは $b = 2$ のときで，そのときの固有ベクトルは上記の通りである。

(4) 固有ベクトルが一意的に定まらないのは，やはり A の固有値が重根となるときである。このうち，$b = 2$ の場合は前小問で解析したから，$b = 0$ の場合を調べる。このとき，固有値は $\lambda = 1$（単根），$\lambda = 3$（重根）で，それぞれに対する固有ベクトルは次のようになる。

(i) $\lambda = 1$ のとき：固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，小問 (2) の (i) と同様にして，

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

ここで，第 1 式より，$2y = 0$ だから $y = 0$。また，第 3 式より，$z = 0$。一方，x は式に出てこないから，任意でよい。よって，$x = 1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[1, 0, 0]$ となる。

(ii) $\lambda = 3$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，小問 (2) の (ii) と同様にして，

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

ここで，第 1 式より $x = y$。あとは任意である。よって，固有ベクトルは y，z を任意パラメータとして ${}^t[y, y, z]$ となる。そこで，特に $y = 1$，$z = 0$ とすると，${}^t[1, 1, 0]$，$y = 0$，$z = 1$ とすると，${}^t[0, 0, 1]$ という固有ベクトルが得られる。これらは明らかに 1 次独立である。

以上より，固有ベクトルが一意的に定まらないのは $b = 0$ のときで，そのとき，3 本の 1 次独立な固有ベクトルを上記のように取ることができる。