

2007 年度 線形代数 II 演習問題 (第 1 回)

- レポートではなく自習用の演習問題なので、解答を提出する必要はありません。
- 解答は、来週中に線形代数 II のホームページに掲載します。

問題 1

次の集合は線形空間か。そうであれば、そのことを証明せよ。そうでなければ、その理由を述べよ。

- (1) 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ で $\int_a^b f(x) dx = 0$ を満たすものの集合 F_1 。
- (2) 区間 $[a, b]$ で定義された 2 階微分可能な関数 $f(x)$ で、 $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$ ($a \leq x \leq b$) を満たすものの集合 F_2 。
- (3) 区間 $[a, b]$ で定義された 2 階微分可能な関数 $f(x)$ で、 $f''(x) + \{f(x)\}^2 = 0$ ($a \leq x \leq b$) を満たすものの集合 F_3 。
- (4) ある実数 a, b を用いて $f(x) = a \sin(x + b)$ と書ける関数の集合 F_4 。
(ヒント: $f_1, f_2 \in F_4$ のとき、 $f_1 + f_2$ を三角関数の加法定理を使って変形してみよ。)
- (5) $m \times n$ 行列 A に対し、 $A\mathbf{x} = 0$ を満たすベクトル $\mathbf{x}$ の集合 V_1 。
- (6) $m \times n$ 行列 A に対し、あるベクトル $\mathbf{x}$ を用いて $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ と書けるベクトル $\mathbf{y}$ の集合 V_2 。

問題 2

次の線形空間において、与えられた要素の組が 1 次独立かどうか調べよ。

- (1) $\mathbf{R}[x]_2$ における 3 つの要素 $x^2 + x + 1$, $x^2 + 2x + 3$, $x^2 + 3x + 5$ 。
- (2) $\mathbf{R}[x]_2$ における 3 つの要素 $x^2 + x + 1$, $x^2 + 2x + 3$, $x^2 + 3x + 4$ 。
- (3) $\mathbf{R}^3$ における 3 本のベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}。 \quad (1)$$

- (4) $\mathbf{R}^3$ における 3 本のベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}。 \quad (2)$$

- (5) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列の空間 V_1 に属する次の 3 つの要素

$$\begin{aligned} a &= \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}, \\ b &= \{1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}, \\ c &= \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}。 \end{aligned} \quad (3)$$

- (6) $[0, 2\pi]$ で定義された関数の空間における 3 つの要素 $\sin x$, $\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ 。

問題 3

次の線形空間において基底を 1 組求め、空間の次元を求めよ。

- (1) 2 次以下の多項式で $f(1) = 0$ を満たすものの空間。
- (2) 漸化式 $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす数列の空間。
- (3) 4×4 の交代行列の空間。
- (4) 2×4 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

に対し、 $A\mathbf{x} = 0$ を満たす 4 次元ベクトルの空間。

問題 4

任意の 2 次以下の多項式 $f(x)$ に対し、 $f(x)$ を問題 2(1) の 3 個の多項式の線形結合として表したときの係数を (順に) a, b, c とする。これにより、 $\mathbf{R}[x]_2$ の任意の元 $f(x)$ は $\mathbf{R}^3$ の元 ${}^t[a, b, c]$ に対応付けられる。このとき、 $1, x, x^2$ はそれぞれ $\mathbf{R}^3$ のどのような元に対応付けられるか。