2007 年度　線形代数 II　第 1 回レポート 課題

2007 年 11 月 9 日（金）の授業終了時に提出してください。あるいは，それ以前に工学部 5 号館 625 号室に提出してください。

問題 1

次の集合が線形空間であることを示せ。また，各空間の次元を求め，基底を 1 組求めよ。

(1) x の 3 次多項式で $f(1) = f(-1) = 0$ を満たすものの集合 F_1。

(2) 2×2 の行列 A で，$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，$AB = BA$ を満たすものの集合 M_1。

(3) 4 次元の数ベクトルの集合

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ 3x + y + 2z + 4w = 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

問題 2

$\mathbf{R}[x]_2$ の 3 つの要素 $x^2 + x + 1$，$x^2 + 2x + 1$，$x^2 + 3x + 2$ を考える。このとき，次の問に答えよ。

(1) この 3 個の多項式は 1 次独立であることを示せ。

(2) 任意の 2 次以下の多項式 $f(x)$ に対し，$f(x)$ をこの 3 個の多項式の線形結合として表したときの係数を（順に）a, b, c とする。これにより，$\mathbf{R}[x]_2$ の任意の元 $f(x)$ は $\mathbf{R}^3$ の元 ${}^t[a, b, c]$ に対応付けられる。このとき，$1, x, x^2$ はそれぞれ $\mathbf{R}^3$ のどのような元に対応付けられるか。

問題 3

(1) 問題 1(3) の線形空間 V_1 に対し，正規直交基底を 1 組求めよ。

(2) 問題 1(3) の線形空間 V_1 に対し，直交補空間の正規直交基底を 1 組求めよ。

問題 4

n 次以下の多項式 $f(x)$，$g(x)$ に対し，

$$(f, g) = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x) \, dx \tag{2}$$

と定義する。このとき，次の問に答えよ。

(1) (f, g) は内積であることを示せ。ただし,「$h(x) \geq 0$ を満たす連続関数 $h(x)$ について，$\int_0^\infty h(x)dx = 0$ ならば $h(x) = 0$」であることを使ってよい。

(2) $n = 2$ の場合を考える。内積 (f, g) を用いて $\mathbf{R}[x]_2$ の基底 $\{1,\, x,\, x^2\}$ に対してグラム・シュミットの直交化法を適用し，正規直交基底を求めよ。