2007年度　線形代数II　第2回レポート課題

2008年1月11日（金）の授業終了時に提出してください。あるいは，それ以前に工学部5号館625号室に提出してください。

問題1

(1) $\mathbf{u}$ を $\| \mathbf{u} \| = 1$ を満たす $\mathbf{R}^n$ のベクトルとし，E を $n \times n$ 単位行列とする。このとき，$\mathbf{R}^n$ の線形変換 f を $f(\mathbf{x}) = (E - 2\mathbf{u}{}^t\mathbf{u})\mathbf{x}$（$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$）と定義すると，$f$ は直交変換であることを示せ。

(2) xy 平面上の単位円 $x^2 + y^2 \leq 1$ で定義された関数のなす線形空間を V とし，$f, g \in V$ に対して内積を $(f,g) = \int\int_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy$ と定義する。このとき，ある実数 α（$0 \leq \alpha < 2\pi$）に対して V の線形変換 F_α を $F_\alpha(f)(x,y) = f(x\cos\alpha - y\sin\alpha,\, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$ と定義すると，F は直交変換であることを示せ。

問題2

3次元空間中の点 $\mathbf{a} = {}^t[\alpha, \beta, \gamma]$ を，平面 $x + y + z = 0$ に対して鏡像の位置にある点 $\mathbf{a}' = {}^t[\alpha', \beta', \gamma']$ に写す変換を f とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 平面 $x + y + z = 0$ に垂直な単位ベクトル $\mathbf{e}_1$ を求めよ。また，この平面に平行で互いに直交する単位ベクトル $\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ を一組求めよ。

(2) α', β', γ' を α, β, γ で表せ。また，これを用いて f の表現行列 A を求めよ。
（ヒント：$\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ を結ぶ線分は平面 $x + y + z = 0$ に垂直で，その中点は平面上にあることを用いよ。）

(3) 小問(1)で求めたベクトル $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ は A の固有ベクトルであることを示し，それぞれについて対応する固有値を求めよ。また，なぜ $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ が固有ベクトルとなるかを，f が鏡映変換であることを用いて幾何学的に説明せよ。

問題3

次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

について，固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ。