

例題 4.5 の逆の証明

教科書の例題 4.5 (90 ページ) では , 次の定理を証明した。

定理 1

n 個の n 次元ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ があるとする。これらを並べてできる行列を $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ とするとき , $\det A \neq 0$ ならば $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は 1 次独立である。

ここではその逆 , すなわち次の定理を証明する。

定理 2

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が 1 次独立ならば $\det A \neq 0$ である。

証明

まず次の事実に注意しておく。

- (A) 任意の行列は , 行基本変形 II , III により階段行列 (p. 29 , (2.17) 式) に変形できる。ここで , $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ であり , $a_{1,n_1+1}, \dots, a_{r,n_r+1}$ は 0 でない。
- (B) 行基本変形 II により , 行列式の値は変わらない。
- (C) 行基本変形 III により , 行列式の絶対値は変わらず , 符号のみが変わる。したがって , 行列式が 0 かどうかは不変。
- (D) A の行列式は , 転置行列 ${}^t A$ の行列式と等しい。
- (E) 行列式の定義 3 (p. 56 , 定理 3.4)

いま , $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が 1 次独立であると仮定する。ベクトル , ${}^t \mathbf{a}_1, {}^t \mathbf{a}_2, \dots, {}^t \mathbf{a}_n$ を縦に並べると , A の転置行列 ${}^t A$ となる。この行列に対して行基本変形 II , III を行うことにより , 階段行列が得られる (上記 (A) より) 。これを ${}^t \bar{A}$ とする。

${}^t \bar{A}$ の任意の行は , ${}^t \mathbf{a}_1, {}^t \mathbf{a}_2, \dots, {}^t \mathbf{a}_n$ の線形結合となっている (行基本変形 II , III の性質より) 。そこで , もし ${}^t \bar{A}$ の最後に 0 の行があるとすると , 線形結合により 0 ベクトルが得られることになり , 1 次独立性に反する。そのため , ${}^t \bar{A}$ の行は第 n 行まで非零である。すなわち , 階段行列において $r = n$ となる。

いま , $n_n \leq n-1$ である ($n_n = n$ だと , 最後の行は 0 のみになってしまう) 。これと $n_1 < n_2 < \cdots < n_n$ および $n_1 \geq 1$ という条件より , $n_i = i-1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) となる。すなわち , ${}^t \bar{A}$ は上三角行列である。さらに , $a_{1,n_1+1}, \dots, a_{n,n_r+1}$ は 0 でない (階段行列の定義) から , その対角要素は 0 でない。

行列式の定義 3 を使うと , 上三角行列の行列式は対角要素の積に等しい。よって ,

$$\det ({}^t \bar{A}) = a_{1,n_1+1} a_{2,n_2+1} \cdots a_{n,n_n+1} \neq 0 \quad (1)$$

となる。したがって , 階段行列への変形方法と上記の (B) , (C) より , $\det ({}^t A) \neq 0$ 。さらに上記の (D) より , $\det A \neq 0$ となる。(証明終)

定理 1 , 2 を使うと 「 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ 」 となるから , n 本の n 次元ベクトルの 1 次独立性は行列式により機械的に判定できることになる。