2007年度　線形代数II　演習問題（第1回）解答

問題1

(1) $f, g \in F_1$ とすると，

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

だから，$f+g \in F_1$。また，

$$\int_a^b (kf)(x)\,dx = \int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx = 0 \tag{2}$$

だから $kf \in F_1$。よって F_1 は線形空間である。

(2) $f, g \in F_2$ とすると，

$$(f+g)''(x) + 3(f+g)'(x) + 2(f+g)(x) = f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) + g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = 0 \tag{3}$$

だから，$f+g \in F_2$。また，

$$(kf)''(x) + 3(kf)'(x) + 2(kf)(x) = k\{f''(x) + 3f'(x) + 2f(x)\} = 0 \tag{4}$$

だから，$kf \in F_2$。よって F_2 は線形空間である。

(3) $f \in F_3$ とするとき，$2f$ を考えると，

$$(2f)''(x) + \{(2f)(x)\}^2 = 2\left[f''(x) + \{f(x)\}^2\right] + 2\{f(x)\}^2 = 2\{f(x)\}^2 \tag{5}$$

となるが，一般に $2\{f(x)\}^2 \neq 0$ であるから，$2f \notin F_3$。よって F_3 は線形空間でない。

(4) $f, g \in F_4$ とすると，ある実数 a, b, c, d により $f(x) = a\sin(x+b)$，$g(x) = c\sin(x+d)$ と書ける。このとき，三角関数の加法定理を使うと，

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= a(\sin x\cos b + \cos x\sin b) + c(\sin x\cos d + \cos x\sin d) \\ &= (a\cos b + c\cos d)\sin x + (a\sin b + c\sin d)\cos x \\ &= \sqrt{a^2+c^2+2ac\cos(b-d)}(\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta) \\ &= \sqrt{a^2+c^2+2ac\cos(b-d)}\sin(x+\theta) \end{aligned} \tag{6}$$

と書ける。ここで，θ は

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a\cos b + c\cos d}{\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos(b-d)}}, \\ \sin\theta &= \frac{a\sin b + c\sin d}{\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos(b-d)}} \end{aligned} \tag{7}$$

を満たす実数である。これより，$f+g \in F_4$。また，$kf = (ka)\sin(x+b)$ だから，明らかに $kf \in F_4$。よって F_4 は線形空間である。

(5) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$ とすると，

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) &= A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \\ A(k\mathbf{x}_1) &= kA\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{8}$$

よって V_1 は線形空間である。

(6) $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_1$ とすると，ある $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$ が存在して $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$，$\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$ と書ける。このとき，

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 &= A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \\ k\mathbf{y}_1 &= kA\mathbf{x}_1 = A(k\mathbf{x}_1) \end{aligned} \tag{9}$$

であるから，$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ も $k\mathbf{y}_1$ も，あるベクトルに A をかけたベクトルとして表現できる。よって $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in V_2$ かつ $k\mathbf{y}_1 \in V_2$。したがって V_2 は線形空間である。

問題 2

(1) a, b, c を 3 つの実数とすると，

$$\begin{aligned} & a(x^2+x+1) + b(x^2+2x+3) + c(x^2+3x+5) \\ = \quad & (a+b+c)x^2 + (a+2b+3c)x + (a+3b+5c) \end{aligned} \tag{10}$$

これが 0 に等しくなるには，$x^2, x, 1$ の係数のすべてが 0 になる必要がある。すなわち，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

となる。これに対して行基本変形を行うと，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

となる。この最後の方程式は，$b = -2c$，$a = c$ であれば成り立つので，$a = b = c = 0$ 以外の解を持つ。よって 1 次独立性の定義より，これらの要素は 1 次独立でない。

(2) 前問と同様にして a, b, c に対する連立 1 次方程式を立てると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

ここで，係数行列の行列式を計算してみると -1 となるので，逆行列が存在する。そこで，逆行列を上式の両辺にかけると，$a = b = c = 0$ が導ける。よって 1 次独立性の定義より，これらは 1 次独立である。

(3) 1 次独立性の定義より，

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{15}$$

すなわち，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

を満たすすべてが 0 ではない x, y, z が存在するかどうかを調べればよい。ここで，係数行列の行列式を計算してみると 3 となるので，逆行列が存在する。そこで，逆行列を上式の両辺にかけると，$x = y = z = 0$ が導ける。よって，これらは 1 次独立である。

(4) 前問と同様にして連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

を立て，小問 (1) と同様にして係数行列の行基本変形を行うと，たとえば $x = 1$，$y = 1$，$z = -1$ という解が存在することがわかる。よって，これらは 1 次独立ではない。別解として，$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ であることに気づけば，1 次独立ではないことが直ちにわかる。

(5) $a + b = c$（”+”は数列の各項どうしの和を取って新しい数列を作る演算を表す）が成り立っているから，この 3 つの要素は 1 次独立ではない。

(6) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$，$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ であるから，

$$\sin x - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{18}$$

が成り立つ。よってこれらは 1 次独立でない。

問題 3

(1) 条件を満たす 2 次以下の多項式を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと，$f(1) = a + b + c = 0$ より，$c = -a - b$ とおける。よって，条件を満たす任意の 2 次以下の多項式は $f(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$ と書ける。また，$(x-1)^2$ と $x - 1$ は明らかに 1 次独立である。よって，$\{(x-1)^2, x-1\}$ は基底であり，この空間の次元は 2 である。
注 基底の取り方は 1 通りではない。実際，上記で $a + b + c = 0$ より $a = -b - c$ として a を消去することもでき，そうすると条件を満たす任意の $f(x)$ を $f(x) = (-b-c)x^2 + bx + c = -b(x^2 - x) - c(x^2 - 1)$ と書ける。これより，$\{x^2 - x, x^2 - 1\}$ も基底であることがわかる。このように，基底の取り方には任意性があるが，**基底を構成する要素の数，すなわち次元は，基底の取り方によらず一意的に定まる。** 以下の例題でも同様である。

(2) この空間に属する数列は，最初の 3 項を定めれば，あとの項は漸化式により自動的に定まる。いま，$a_1 = 1$，$a_2 = 0$，$a_3 = 0$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$b_1 = 0$，$b_2 = 1$，$b_3 = 0$ を満たす数列 $\{b_n\}$，$c_1 = 0$，$c_2 = 0$，$c_3 = 1$ を満たす数列 $\{c_n\}$ を考えると，これらは明らかに 1 次独立である。また，漸化式を満たす任意の数列を $\{x_n\}$ とし，$x_1 = \alpha$，$x_2 = \beta$，$x_3 = \gamma$ とすると，数列 $\{\alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n\}$ は漸化式を満たし，最初の 3 項が $\{x_n\}$ と同じであるから，$\{x_n\}$ と等しい。したがって，$\{x_n\}$ は $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の線形結合で表せる。これより，$\{\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}\}$ は基底である。空間の次元は 3 である。

(3) 4×4 の任意の交代行列 A は，6 個の実数 a, b, c, d, e, f を用いて

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

と書ける。そこで，6 個の交代行列

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

を考えると，これらは明らかに 1 次独立である（$aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 = 0$ となるのは，$a = b = c = d = e = f = 0$ のときのみ）。さらに，式 (19) より，任意の交代行列 A は $A = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6$ と書ける。よって，$\{E_1, E_2, \dots, E_6\}$ は基底である。空間の次元は 6 である。

(4) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に対して行基本変形を行うと，

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \tag{21}$$

よって，この連立 1 次方程式の一般解は $x_1 = s + 2t$，$x_2 = -2s - 3t$，$x_3 = s$，$x_4 = t$（s, t は任意定数）で与えられる。これを列ベクトルの形に整理すると，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

となる。そこで，

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

とおくと，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ は明らかに 1 次独立であり，これらが基底である。空間の次元は 2 次元である。

問題 4

まず x^2 について考える。x^2 を問題 2(2) の 3 個の多項式の線形結合として表すと，

$$\begin{aligned} & a(x^2 + x + 1) + b(x^2 + 2x + 3) + c(x^2 + 3x + 4) \\ = \quad & (a + b + c)x^2 + (a + 2b + 3c)x + (a + 3b + 4c) = x^2 \end{aligned} \tag{24}$$

ここで，x の各次数の項の係数を比較することにより，a, b, c について次の連立 1 次方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

これを解くと，$a = 1, b = 1, c = -1$。よって，x^2 は $\mathbf{R}^3$ の元

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

に対応付けられる。

同様にして，x，1 はそれぞれ数ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

に対応付けられる。

問題 5

n 本の n 次元数ベクトルの 1 次独立性を調べるには，これらを並べてできる $n \times n$ 行列の行列式が 0 かどうかを調べればよい。

まず，問題 2(3) の数ベクトルに対しては，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} = 24 + 16 + 9 - 18 - 12 - 16 = 3 \tag{28}$$

なので，これらは 1 次独立である。

一方，問題 2(4) の数ベクトルに対しては，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 15 + 16 + 9 - 18 - 12 - 10 = 0 \tag{29}$$

なので，これらは 1 次従属である。