

## 2008 年度 線形代数 II 演習問題 ( 第 2 回 ) 解答

### 問題 1

(1) (R1) ~ (R4) が成り立つことは以下のようにして示せる。

(R1)

$$(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = {}^t \mathbf{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{a} = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} {}^t \mathbf{b} = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (1)$$

(R2)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= ({}^t \mathbf{a}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{b} + {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (2)$$

$(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b})$  も同様にして示せる。

(R3)  $k$  を任意のスカラーとすると ,

$$(\mathbf{a}, k\mathbf{b}) = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (k\mathbf{b}) = k {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{b} = k(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (3)$$

(R4)  $\mathbf{a} = {}^t (a_1, a_2, a_3)$  とすると ,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = {}^t \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{a} = a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 \geq 0. \quad (4)$$

また ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$  となるのは  $a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 = 0$  , すなわち  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  のとき , つまり  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  のときに限る。

(2) (R1) ~ (R4) が成り立つことは以下のようにして示せる。

(R1) トレースは対角要素の和であり , 正方行列の場合 , 転置した行列の対角要素は元の行列の対角要素に等しいから

$$(B, A) = \text{Tr}({}^t B A) = \text{Tr}({}^t ({}^t B A)) = \text{Tr}({}^t A B) = (A, B) \quad (5)$$

(R2)  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$  (教科書 p. 7) より ,

$$\begin{aligned} (A, B + C) &= \text{Tr}({}^t A (B + C)) = \text{Tr}({}^t A B + {}^t A C) = \text{Tr}({}^t A B) + \text{Tr}({}^t A C) \\ &= (A, B) + (A, C) \end{aligned} \quad (6)$$

$(A + C, B) = (A, B) + (C, B)$  も同様にして示せる。

(R3)  $k$  を任意のスカラーとすると ,  $\text{Tr}(kA) = k \text{Tr}(A)$  (教科書 p. 7) であるから ,

$$(A, kB) = \text{Tr}({}^t A (kB)) = \text{Tr}(k {}^t A B) = k \text{Tr}({}^t A B) = k(A, B) \quad (7)$$

(R4) トレースが対角要素の和であることと，行列の積の公式より，

$$(A, A) = \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^2 ({}^tAA)_{ii} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ki}a_{ki} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0 \quad (8)$$

$(A, A) = 0$  となるのは  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$  のとき，すなわち  $A = O$  のときのみである。

## 問題 2

(1)  $(f, g)$  は内積の満たすべき性質 (R1) ~ (R4) を満たす。実際，定義に従って計算すると，

$$(R1) \quad (f, g) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)g(x_i) = \sum_{i=0}^2 g(x_i)f(x_i) = (g, f) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R2) \quad (f + g, h) = \sum_{i=0}^2 \{f(x_i) + g(x_i)\} h(x_i) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)h(x_i) + \sum_{i=0}^2 g(x_i)h(x_i) = (f, h) + (g, h) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R3) \quad k \text{ をスカラーとするととき，} (kf, g) = \sum_{i=0}^2 \{kf(x_i)\} g(x_i) = k \sum_{i=0}^2 f(x_i)g(x_i) = k(f, g) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R4) \quad f \in \mathbf{R}[x]_2 \text{ とし，} f(x) = ax^2 + bx + c \text{ とおくと，}$$

$$\begin{aligned} (f, f) &= \sum_{i=0}^2 \{f(x_i)\}^2 \\ &= \{f(-1)\}^2 + \{f(0)\}^2 + \{f(1)\}^2 \\ &= (a - b + c)^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

また，

$$\begin{aligned} (f, f) = 0 &\Leftrightarrow a - b + c = 0 \quad \text{かつ} \quad c = 0 \quad \text{かつ} \quad a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

よって (R4) も成り立つ。

以上より， $(f, g)$  は  $\mathbf{R}[x]_2$  の内積である。

(2) 小問 (1) と同様に計算すると， $(f, g)$  は内積の満たすべき性質 (R1) ~ (R3) を満たす。また，(R4) の前半も満たす。すなわち，任意の  $f \in \mathbf{R}[x]_2$  に対して  $(f, f) \geq 0$  が成り立つ。

しかし，(R4) の後半，すなわち「 $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ 」は成り立たない。実際， $f(0) = f(1) = 0$  となる  $\mathbf{R}[x]_2$  の 0 でない要素，たとえば  $f(x) = x(x - 1)$  を考えると， $(f, f) = 0$  となる。したがって，本小問で定義した  $(f, g)$  は  $\mathbf{R}[x]_2$  の内積ではない。

## 問題 3

(1)  $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$  とするとき，これらが正規直交系の定義

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \quad (11)$$

を満たすことを示せばよい。実際に計算してみると，

$$(f_0, f_0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx = 1, \quad (12)$$

$$(f_0, f_1) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \quad (13)$$

となり，これらについては式 (11) を満たしていることがわかる。他の組み合わせにしても，同様に式 (11) を満たすことが示せるので，与えられた関数の集合は正規直交系である。

- (2)  $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  ,  $f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) とするとき，これらが正規直交系の定義 (11) を満たすことを示す。ただし， $(f_i, f_j) = (f_j, f_i)$  であるから， $i \leq j$  の場合のみを考えればよい。まず， $(f_0, f_0) = 1$  は式 (12) で既に示した。次に， $1 \leq j \leq m$  を満たす任意の  $j$  に対し，

$$\begin{aligned} (f_0, f_j) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos jx dx = 0, \\ (f_j, f_j) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cos^2 jx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2jx) \right\} dx = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立つ。そこで，あとは  $1 \leq j < k \leq m$  を満たす  $j, k$  に対して  $(f_j, f_k) = 0$  を示せばよい。このため，三角関数の積を和に直す公式

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \} \quad (15)$$

を用いると，

$$(f_j, f_k) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \cos((j+k)x) + \cos((j-k)x) \} dx = 0 \quad (16)$$

ここで，任意の 0 でない整数  $n$  に対して  $\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$  であることを用いた。以上より，すべての場合について式 (11) が成り立つので，与えられた関数の集合は正規直交系である。

#### 問題 4

- (1) まず， $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  の場合を考える。シュワルツの不等式の証明では，次の恒等式

$$\|t\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \left( t - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right)^2 + \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \{ \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \} \quad (17)$$

を導き，左辺が非負であることから， $t$  の 2 次関数である右辺の最小値が非負であること，すなわち

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \{ \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \} \geq 0 \quad (18)$$

を導いた。いま，シュワルツの不等式で等号が成り立つ場合とは，

$$\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = 0 \quad (19)$$

が成り立つ場合だから，これは右辺の 2 次関数の最小値が 0 となる場合である。これはすなわち，左辺がある  $t$  に対して 0 となるとき，すなわち， $t\mathbf{a} = \mathbf{b}$  となる  $t$  が存在する場合である。一方， $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  の場合には，式 (19) は常に成り立つ。以上より，シュワルツの不等式の等号が成り立つ場合とは， $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  であるときか， $\mathbf{b}$  が  $\mathbf{a}$  の定数倍となるときであることがわかる。

- (2) 両辺は非負だから，右辺の 2 乗から左辺の 2 乗を引いて 0 以上となることを示せばよい。内積とノルムの関係  $\|x\|^2 = (x, x)$  を使って計算すると，

$$\begin{aligned}
 (\|x\| + \|y\|)^2 - \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 - (x+y, x+y) \\
 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 - \{\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2\} \\
 &= 2\{\|x\|\|y\| - (x, y)\} \geq 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，最後の不等式ではシュワルツの不等式を用いた。以上より，与えられた不等式が成り立つ。なお，この不等式は  $x, y$  が幾何ベクトルの場合，三角形の 2 辺の和が他の 1 辺よりも長いことを意味するので，三角不等式と呼ばれる。

## 問題 5

- (1) 与えられたベクトルを  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  とおくと，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}'_2}{\|\mathbf{e}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}'_3}{\|\mathbf{e}'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{21}$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  が正規直交化したベクトルである。

- (2) 与えられた行列の列は小問 (1) の  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  であるから，(1) のグラム・シュミットの直交化の結果を利用できる。QR 分解の公式より，

$$Q = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$R = \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3) \\ 0 & \|\mathbf{e}'_2\| & (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3) \\ 0 & 0 & \|\mathbf{e}'_3\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{23}$$

となる。なお，積  $QR$  を計算すると，実際に元の行列になっているのを確かめることができる。