2008 年度　線形代数 II　演習問題（第 3 回）解答

問題 1

(1) 与えられたベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{e}_2' &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1 = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2'}{\| \mathbf{e}_2' \|} = \frac{1}{6\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{e}_3' &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}_3'}{\| \mathbf{e}_3' \|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が正規直交化したベクトルである。

(2) $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
e_0 &= \frac{f_0}{\| f_0 \|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty e^{-x} \cdot 1 \cdot 1 \, dx}} = \frac{1}{1} = 1, \\
e_1' &= f_1 - (e_0, f_1)e_0 = x - \left(\int_0^\infty e^{-x} \cdot 1 \cdot x \, dx \right) \cdot 1 = x - 1, \\
e_1 &= \frac{e_1'}{\| e_1' \|} = \frac{x-1}{\sqrt{\int_0^\infty e^{-x} \cdot (x-1)^2 \, dx}} = \frac{x-1}{1} = x - 1, \\
e_2' &= f_2 - (e_0, f_2)e_0 - (e_1, f_2)e_1 \\
&= x^2 - \left(\int_0^\infty e^{-x} \cdot 1 \cdot x^2 \, dx \right) \cdot 1 - \left(\int_0^\infty e^{-x} \cdot (x-1) \cdot x^2 \, dx \right) \cdot (x-1) \\
&= x^2 - 4x + 2 \\
e_2 &= \frac{e_2'}{\| e_2' \|} = \frac{x^2 - 4x + 2}{\sqrt{\int_0^\infty e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2)^2 \, dx}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

したがって，$e_0(x) = 1, e_1(x) = x - 1, e_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ が正規直交化した関数である。これらは Laguerre 多項式と呼ばれ，量子力学で水素原子の波動関数を計算するときに必要となる。

問題 2 グラム・シュミットの直交化の中間段階の式

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{e}_i \tag{3}$$

と $\mathbf{e}_j$（$1 \le j \le k-1$）との内積を計算すると，

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}'_k) &= (\mathbf{e}_j, \mathbf{v}_k) - \sum_{i=1}^{k-1}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_k)(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \\ &= (\mathbf{e}_j, \mathbf{v}_k) - (\mathbf{e}_j, \mathbf{v}_k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}$ の直交性より，$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ は $i = j$ のとき 1，それ以外のとき 0 となることを用いた。$\mathbf{e}_k$ は $\mathbf{e}'_k$ を正規化することにより得られるから，$\mathbf{e}_k$ も $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}$ と直交していることがわかる。

問題 3

(1) 与えられたベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{e}'_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}'_2}{\| \mathbf{e}'_2 \|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{e}'_3 &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}'_3}{\| \mathbf{e}'_3 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が正規直交化したベクトルである。

(2) 与えられた行列の列は小問 (1) の $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ であるから，(1) のグラム・シュミットの直交化の結果を利用できる。QR 分解の公式より，

$$Q = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$R = \begin{pmatrix} \| \mathbf{v}_1 \| & (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3) \\ 0 & \| \mathbf{v}_2 \| & (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3) \\ 0 & 0 & \| \mathbf{v}_3 \| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる。なお，積 QR を計算すると，実際に元の行列になっているのを確かめることができる。

問題 4

(1) 基底の要素 $1, x, x^2$ に対する F の作用を求めると，

$$
\begin{aligned}
F(1) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
F(x) &= -(x-1) + x = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
F(x^2) &= \frac{1}{2}x(x-2) \cdot 2 - (x-1) \cdot 2x + x^2 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2
\end{aligned} \tag{8}
$$

したがって，

$$
A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}
$$

となる。

(2) $\mathbf{u} =^t [u_0, u_1, u_2]$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad u_0 + u_1 = 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

よって，u_0, u_2 を任意の数とするとき，N_A の任意の元は ${}^t[u_0, -u_0, u_2]$ と書ける。したがって，たとえば，

$$
\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}
$$

が基底である。

(3) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対応する $\mathbf{R}[x]_2$ の元は，それぞれ $1 - x, x^2$ である。これらが N_F の基底である。

(4) N_F の任意の元は，小問 (3) で求めた基底の線形結合となるから，2 つの任意パラメータ a, b を用いて $a(1-x) + bx^2$ と書ける。

(5) 小問 (4) で求めた式に F を作用させ，0 になることを確かめればよい。

$$
\begin{aligned}
F(a(1-x) + bx^2) &= \frac{1}{2}x(x-2) \cdot 2b - (x-1) \cdot (-a + 2bx) + (a - ax + bx^2) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

したがって，小問 (4) で求めた式は微分方程式の解となっている。