

2008 年度 線形代数学 II 演習問題 (第 4 回) 解答

問題 1

(1) $y_1, y_2 \in \text{Im } f$ とすると, $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ であるような $x_1, x_2 \in V$ が存在する。このとき,

$$\begin{aligned} f(kx_1) &= kf(x_1) = ky_1, \\ f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2 \end{aligned} \quad (1)$$

だから, f を作用させて ky_1 および $y_1 + y_2$ となるような V の要素が存在する。したがって, ky_1 も $y_1 + y_2$ も $\text{Im } f$ の要素である。以上より, $\text{Im } f$ は W の部分空間である。

(2) $x_1, x_2 \in \text{Ker } f$ とすると, $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$ である。このとき,

$$\begin{aligned} f(kx_1) &= kf(x_1) = 0, \\ f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

だから, kx_1 も $x_1 + x_2$ も $\text{Ker } f$ の要素である。以上より, $\text{Ker } f$ は V の部分空間である。

問題 2

まず, 任意の n 次元実数ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して ${}^t\mathbf{x}{}^tAA\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$ が成り立つとする。このとき, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = \mathbf{e}_j$ として両辺に代入すると,

$$({}^tAA)_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}), \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3)$$

となる。これは $({}^tAA)_{ij} = E$ であることを示す。逆に $({}^tAA)_{ij} = E$ ならば, 任意の n 次元実数ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して ${}^t\mathbf{x}{}^tAA\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$ が成り立つことは明らか。よって必要十分条件が証明できた。

問題 3

直線 $y = (\tan \frac{\theta}{2})x$ に対する折り返しであることを示すには, (i) ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{x}'}$ がこの直線に垂直であることと, (ii) 線分 $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'}$ の中点がこの直線上にあることを言えばよい。

まず, (i) を示す。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{x}'} &= \mathbf{x}' - \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\cos \theta - 1)x + \sin \theta y \\ \sin \theta x - (\cos \theta + 1)y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y \\ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} x - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} y \end{bmatrix} \\ &= \left(-2 \sin \frac{\theta}{2} x + 2 \cos \frac{\theta}{2} y \right) \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

一方, 直線 $y = (\frac{\theta}{2})x$ の方向ベクトルは $[\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}]$ であるから, これとベクトル $\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{x}'}$ との内積は 0。よって両者は直交する。

次に (ii) を示す。線分 $\overline{xx'}$ の中点は ,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)x + \frac{1}{2} \sin \theta y \\ \frac{1}{2} \sin \theta x + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} x + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} x + \sin^2 \frac{\theta}{2} y \end{bmatrix} \\
 &= \left(\cos \frac{\theta}{2} x + \sin \frac{\theta}{2} y \right) \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

これは明らかに直線 $y = (\tan \frac{\theta}{2}) x = (\sin \frac{\theta}{2} / \cos \frac{\theta}{2}) x$ 上にある。

問題 4

(1) A の任意の固有値を λ とし , 対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると ,

$$A^2 \mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}. \tag{6}$$

一方 , $A^2 = O$ だから , 上式の左辺は 0 に等しい。よって $0 = \lambda^2 \mathbf{x}$ 。ここで固有ベクトルの定義より $\mathbf{x} \neq 0$ だから , $\lambda^2 = 0$ 。よって $\lambda = 0$ となる。したがって A の固有値はすべて 0 である。

(2) 小問 (2) と同様に ,

$$A^2 \mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}. \tag{7}$$

これは λ^2 , $\mathbf{x}$ が A^2 の固有値・固有ベクトルであることを表す。

(3) A が実数を要素とする交代行列であることより , $A^* = {}^t A = -A$ である。これを用いて $\mathbf{x}^* A \mathbf{x}$ を 2 通りのしかたで計算すると ,

$$\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x}, \tag{8}$$

$$\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = (A^* \mathbf{x})^* \mathbf{x} = -(A\mathbf{x})^* \mathbf{x} = -(\lambda \mathbf{x})^* \mathbf{x} = -\bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{x}. \tag{9}$$

両式を比べて $\mathbf{x}^* \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \neq 0$ に注意することにより , $\lambda = -\bar{\lambda}$ が得られる。これは , λ が純虚数であることを意味する ($\lambda = a + bi$ とおいて両辺に代入してみよ)。

次に , $\mathbf{x}^* A \mathbf{y}$ を 2 通りのしかたで計算する。固有値 λ は純虚数であるから $\lambda^* = \bar{\lambda} = -\lambda$ であることに注意すると ,

$$\mathbf{x}^* A \mathbf{y} = \mathbf{x}^* \mu \mathbf{y} = \mu \mathbf{x}^* \mathbf{y}, \tag{10}$$

$$\mathbf{x}^* A \mathbf{y} = (A^* \mathbf{x})^* \mathbf{y} = (-A\mathbf{x})^* \mathbf{y} = (-\lambda \mathbf{x})^* \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{y}. \tag{11}$$

これより $\lambda \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \mu \mathbf{x}^* \mathbf{y}$ を得る。仮定より $\lambda \neq \mu$ であるから , $\mathbf{x}^* \mathbf{y} = 0$ でなければならない。すなわち , $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは直交する。

問題 5

(1) 基底の各要素に対する F の作用を考えると,

$$F(1) = 1 \quad (12)$$

$$F(\cos x) = \cos(x+c) = \cos c \cos x - \sin c \sin x \quad (13)$$

$$F(\sin x) = \sin(x+c) = \sin c \cos x + \cos c \sin x \quad (14)$$

$$F(\cos 2x) = \cos(2(x+c)) = \cos 2c \cos 2x - \sin 2c \sin 2x \quad (15)$$

$$F(\sin 2x) = \sin(2(x+c)) = \sin 2c \cos 2x + \cos 2c \sin 2x \quad (16)$$

よって, F の表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c & 0 & 0 \\ 0 & -\sin c & \cos c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 2c & \sin 2c \\ 0 & 0 & 0 & -\sin 2c & \cos 2c \end{pmatrix} \quad (17)$$

となる。

(2) V に属する関数はすべて周期 2π の周期関数であることに注意すると,

$$\begin{aligned} (F(f), F(g)) &= \int_0^{2\pi} f(x+c)g(x+c) dx \\ &= \int_c^{2\pi+c} f(x')g(x') dx' \\ &= \int_c^{2\pi} f(x)g(x) dx + \int_{2\pi}^{2\pi+c} f(x)g(x) dx \\ &= \int_c^{2\pi} f(x)g(x) dx + \int_0^c f(x)g(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx = (f, g) \end{aligned} \quad (18)$$

よって F は直交変換である。

問題 6

(1)

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -4 \\ -4 & \lambda-2 & -5 \\ -2 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) - 4 \cdot 2(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8) \\ &= (\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+1). \end{aligned} \quad (19)$$

よって固有値は $\lambda = -1, 2, 5$ である。

固有値 -1 に属する固有ベクトルを $\mathbf{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3]$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 4 \\ 4 & 2+1 & 5 \\ 2 & 0 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

これを解くと (定数倍の任意性はあるが) $\mathbf{x} = {}^t[2, -1, -1]$ となる。

同様にして , 固有値 2 に属する固有ベクトルは ${}^t[0, 1, 0]$, 固有値 5 に属する固有ベクトルは ${}^t[1, 3, 1]$ となる。

- (2) 固有値がすべて異なるから , A は固有ベクトルを横に並べた行列 P によって対角化でき , そのとき対角行列 D の対角成分には固有値が (固有ベクトルと同じ順番で) 並ぶ。したがって ,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる。

- (3) $P^{-1}AP = D$ より , $A = PDP^{-1}$ 。そこで , P^{-1} を計算すると ,

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

となる。したがって ,

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 5^n & 0 & -2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 5^n \\ -(-1)^n - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 5^n & 3 \cdot 2^n & (-1)^n - 7 \cdot 2^n + 6 \cdot 5^n \\ -(-1)^n + 5^n & 0 & (-1)^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

となる。