2008 年度　線形代数学 II　中間試験

- 大問題ごとに解答用紙を 1 枚使うこと。
- 解答用紙には，氏名，学籍番号，大問題の番号を記入すること。
- 問題用紙には裏面もあるので注意すること。

問題 1

実数を要素とする 2×2 行列全体の集合を M_2 とすると，M_2 は線形空間である。いま，M_2 のうち対称行列（$a_{ji} = a_{ij}$ である行列）全体の集合を S_2 とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) S_2 は線形空間であることを示せ。

(2) S_2 の基底を 1 組求め，次元を求めよ。

(3) M_2 の要素 A，B に対し，$(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t AB)$ と定義する。このとき，(A, B) は内積であることを示せ。

(4) 小問 (3) で定義した内積に対し，S_2 の直交補空間を T_2 とする。T_2 の基底を 1 組求め，次元を求めよ。また，T_2 はどんな行列の集合かを言葉で述べよ。

問題 2

(1) 区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で定義された実数値をとる連続関数の集合を V とすると，V は線形空間である。いま，$f, g \in V$ に対して

$$(f, g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\,dx \tag{1}$$

と定義すると，(f, g) は内積であることを示せ。ただし，「$h(x) \geq 0$ を満たす連続関数 $h(x)$ について $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx = 0$ ならば，区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ において$h(x) = 0$」であることを使ってよい。

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \sin x\,dx \leq \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \tag{2}$$

ただし，授業で習った不等式は証明なしで使ってよい。また，$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ である。

問題 3

実数を係数とする 2 次以下の多項式のなす空間を $\mathbf{R}[x]_2$ とする。このとき，微分方程式

$$(x^2+2x+2)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-2(x+1)\frac{df(x)}{dx}+2f(x)=0 \tag{3}$$

の $\mathbf{R}[x]_2$ における解を，次の手順で求めよ。

(1) $f \in \mathbf{R}[x]_2$ に対して $(x^2+2x+2)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-2(x+1)\frac{df(x)}{dx}+2f(x)$ を対応させる写像を F とすると，F は $\mathbf{R}[x]_2$ から $\mathbf{R}[x]_2$ 自身への線形写像である。$\mathbf{R}[x]_2$ の基底を $\{1, x, x^2\}$ とするとき，F の表現行列 A を求めよ。

(2) $N_A = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \mid A\mathbf{u} = \mathbf{0}\right\}$ とする。N_A の基底を 1 組求めよ。

(3) $N_F = \{f \in \mathbf{R}[x]_2 \mid F(f) = 0\}$ とする。小問 (2) の結果を用いて N_F の基底を 1 組求めよ。

(4) N_F の任意の要素を，パラメータを含む式で表せ。

(5) 小問 (4) で求めた式を微分方程式 (3) に代入し，解となっていることを示せ。