

2008 年度 線形代数学 II 中間試験解答

問題 1

(1) $A_1, A_2 \in S_2$ とすると, ${}^t A_1 = A_1, {}^t A_2 = A_2$ である。これより, k をスカラーとすると

$${}^t(A_1 + A_2) = {}^t A_1 + {}^t A_2 = A_1 + A_2 \quad (1)$$

$${}^t(kA_1) = k{}^t A_1 = kA_1 \quad (2)$$

となる。したがって, $A_1 + A_2 \in S_2, kA_1 \in S_2$ となるから, S_2 は線形空間である。

(2) $A \in S_2$ とすると,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

と書ける。したがって, S_2 の任意の要素は, 3 つの行列

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

の 1 次結合で書ける。これら 3 つの行列は明らかに 1 次独立であるから, S_2 の基底となる。したがって, S_2 の次元は 3 である。

(3) (A, B) は内積の満たすべき性質 (R1) ~ (R4) を満たす。実際, トレースの性質を使って計算すると,

(R1) $(A, B) = \text{Tr}({}^t AB) = \text{Tr}({}^t({}^t BA)) = \text{Tr}({}^t BA) = (B, A)$ より成り立つ。

(R2) $(A + B, C) = \text{Tr}({}^t(A + B)C) = \text{Tr}({}^t AC + {}^t BC) = \text{Tr}({}^t AC) + \text{Tr}({}^t BC) = (A, C) + (B, C)$ より成り立つ。

(R3) k をスカラーとすると, $(kA, B) = \text{Tr}({}^t(kA)B) = k\text{Tr}({}^t AB) = k(A, B)$ より成り立つ。

(R4) $A = (a_{ij}) \in M_2$ に対して,

$$\begin{aligned} (A, A) &= \text{Tr}({}^t AA) \\ &= \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

ただし, A の要素は実数であることを用いた。また, 上式より明らかに,

$$(A, A) = 0 \Leftrightarrow a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0 \Leftrightarrow A = O. \quad (6)$$

よって (R4) も成り立つ。

以上より, (A, B) は M_2 の内積である。

(4) T_2 の任意の要素を

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad (7)$$

とおく。 B が S_2 の任意の要素と直交するということは、 S_2 の基底 E_1, E_2, E_3 と直交することと同値であるから、

$$\begin{aligned}(B, E_1) &= \text{Tr}({}^t B E_1) = \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = e = 0, \\(B, E_2) &= \text{Tr}({}^t B E_2) = \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = g + f = 0, \\(B, E_3) &= \text{Tr}({}^t B E_3) = \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = h = 0.\end{aligned}\tag{8}$$

これより、

$$B = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\tag{9}$$

と書ける。したがって、 T_2 の基底は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\tag{10}$$

であり、 T_2 の次元は 1 である。 T_2 は、 2×2 の反対称行列（交代行列）の集合である。

問題 2

(1) (f, g) は内積の満たすべき性質 (R1) ~ (R4) を満たす。実際、定義に基づいて計算すると、

$$(R1) \quad (f, g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)f(x) dx = (g, f) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R2) \quad (f + g, h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) + g(x)\} h(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)h(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)h(x) dx = (f, h) + (g, h) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R3) \quad k \text{ をスカラーとすると、} (kf, g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} kf(x)g(x) dx = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x) dx = k(f, g) \text{ より成り立つ。}$$

$$(R4) \quad f(x) \text{ は実数値をとる関数であるから、} (f, f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx \geq 0. \text{ また、問題文での注意より、} (f, f) = 0 \text{ となるのは区間 } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ において } \{f(x)\}^2 = 0, \text{ すなわち } f(x) = 0 \text{ となるときのみである。}$$

以上より、 (f, g) は V の内積である。

(2) 不等式の左辺が内積 $(\sqrt{x}, \sin x)$ であることに注意して Schwarz の不等式を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \sin x dx &= (\sqrt{x}, \sin x) \\ &\leq \|\sqrt{x}\| \|\sin x\| \\ &= \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{x})^2 dx} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

よって求める不等式が証明できた。

問題 3

(1) 基底の要素 $1, x, x^2$ に対する F の作用を求めると,

$$\begin{aligned} F(1) &= 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ F(x) &= -2(x+1) + 2x = -2 = -2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ F(x^2) &= (x^2 + 2x + 2) \cdot 2 - 2(x+1) \cdot 2x + 2x^2 = 4 = 4 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{aligned} \quad (12)$$

したがって,

$$A_F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

となる。

(2) $\mathbf{u} = {}^t[u_0, u_1, u_2]$ とおくと,

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow u_0 - u_1 + 2u_2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

よって, u_0, u_2 を任意の数とすると, N_A の任意の元は ${}^t[u_1 - 2u_2, u_1, u_2]$ と書ける。したがって, たとえば,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

が基底である。

(3) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対応する $\mathbf{R}[x]_2$ の元は, それぞれ $x+1, x^2-2$ である。これらが N_F の基底である。

(4) N_F の任意の元は, 小問 (3) で求めた基底の線形結合となるから, 2 つの任意パラメータ a, b を用いて $a(x+1) + b(x^2-2)$ と書ける。

(5) 小問 (4) で求めた式に F を作用させ, 0 になることを確かめればよい。

$$\begin{aligned} F(a(x+1) + b(x^2-2)) &= (x^2 + 2x + 2) \cdot 2b - 2(x+1) \cdot (a + 2bx) + 2(ax + a + bx^2 - 2b) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

したがって, 小問 (4) で求めた式は微分方程式の解となっている。