

## 2008 年度 線形代数 II 中間試験講評

中間試験おつかれさまでした。このメモでは、各問題についての平均点と、出題の意図、多かった間違いについて述べます。なお、平均点は各小問ごとに 1 点満点として出しています。

### 問題 1

平均点 (1) 0.69 点, (2) 0.74 点, (3) 0.87 点, (4) 0.33 点

出題意図 線形空間の定義、基底と次元の求め方、内積の定義、直交補空間の求め方など、線形代数学 II でこれまでに学んだ基本概念を確認する問題です。直交補空間は、幾何ベクトル空間の場合には平面に直交するベクトルの集合のようにわかりやすい意味を持ちますが、実は内積さえ定義されれば、どんな線形空間の部分空間に対しても定義できます。その点が重要なので、あえてあまり馴染みのない行列の空間を例にとりました。

多かった間違い

- 小問 (1) 対称行列を  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$  とおいている人が非常に多かったです。対称行列は、 $a_{ij} = a_{ji}$  となるような行列ですが、 $a_{ii} = a_{jj}$  という条件はないので、 $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  とおかなくてはなりません。教科書の定義を確認してください。
- 小問 (1) 対称行列と転置行列を混同している答案がいくつかありました。ある正方行列  $A$  が与えられたとき、その要素の  $a_{ij}$  と  $a_{ji}$  を入れ替える操作が転置で、転置を行った結果が転置行列  ${}^tA$  です。対称行列とは、転置しても変わらない行列、すなわち、すべての要素に対してもともと  $a_{ij} = a_{ji}$  が成り立っている行列のことです。この点を混同すると、問題文の意味がわからなくなってしまいます。
- 小問 (3) 内積の性質の証明で、行列が対称行列、すなわち  $S_2$  の要素であると仮定して証明しようとしている答案がありましたが、本小問は  $(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$  が  $M_2$  の ( $S_2$  のではなく) 内積であることを示す問題なので、このような仮定をしてはいけません。
- 小問 (3) 内積の性質  $R_4$  の証明で、 $(A \in S_2 \text{ と仮定してだと思いますが }) {}^t(A, A) = \text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(A^2) \geq 0$ 、等号が成立するのは  $A^2 = O$  つまり  $A = O$  のときのみである」としている答案が複数ありました。ここにはいくつかの間違いがあります。まず、実数の行列  $A$  であっても、 $A^2$  の (対角) 要素は必ずしも 0 以上になりません ( $2 \times 2$  の回転行列など)。また、 $\text{Tr}(A^2) = 0$  から言えるのは、 $A^2$  の対角要素の和が 0 ということだけであって、 $A^2 = O$  は言えません。さらに、 $A^2 = O$  だとしても、 $A = O$  とは言えません ( $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  など)。このように行列の計算では、実数の計算で当然の規則が必ずしも成り立ちません。行列の面白いところですが、計算には注意する必要があります。
- 小問 (4)  $T_2$  の要素を  $\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$  とおき、これが任意の  $S_2$  の要素  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  と直交するという条件から  $u, v, w, z$  に関する条件を求めようとしている人がいました。これは数学的には正しいですが、文字が多くて煩雑になるため、この方法で正解に到達している人はいませんでした。 $S_2$  の任意の要素と直交するということは、 $S_2$  の基底の要素すべてと直交するということと等価なので、解答例のように、小問 (2) の結果を使うのが得策です。こうすると計算はずっと簡単になります。

- 小問 (4) 「 $S_2$  の基底と直交する」という条件を表現するのに、 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  のように通常の行列の積を使っている答案がいくつかありました。直交するかどうかは内積が 0 かどうかで判定するので、これはもちろん  $\text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = 0$  という条件でなくてはなりません。

## 問題 2

平均点 (1) 0.95 点, (2) 0.34 点

出題意図 シュワルツの不等式の応用問題です。シュワルツの不等式を使うと、他の方法では導くのが難しい不等式を簡単に示せることがあるので、それをやってもらいました。 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \sin x \, dx$  という式を内積と見ることができるかどうかのポイントです。小問 (1) は、 $(f, g)$  が内積であると示してもらうことで、(2) へのヒントになっています。

多かった間違い

- 小問 (1) この小問は満点の人がほとんどでしたが、内積の性質 R4 の証明において、 $f(x)$  に具体的な関数を代入して証明しようとしている答案がいくつかありました。R4 は、もちろん任意の関数に対して成り立たないといけないので、特定の関数だけについて成り立つことを示したのではだめです。
- 小問 (2) シュワルツの不等式  $|(f, g)|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$  は正しく書けているのに、右辺のノルムが何を意味しているかがわかっていない答案が数多くありました。たとえば  $\|\sqrt{x}\|^2 \|\sin x\|^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{x})^2 (\sin x)^2 \, dx$  とするなどです。ノルムの定義を思い出して、 $\|\sqrt{x}\|^2 = (\sqrt{x}, \sqrt{x}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{x})^2 \, dx$  のように、内積の定義に戻って計算するのが正しいやり方です。
- 小問 (2) 「両辺を 2 乗して  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{x} \sin x)^2 \, dx \leq \frac{\pi^3}{32}$  を証明する」と書いている人が多数いましたが、与えられた式の左辺の 2 乗はもちろん  $\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \sin x \, dx \right)^2$  で、これは  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{x} \sin x)^2 \, dx$  とは違います。また、 $\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \sin x \, dx \right)^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{x} \sin x)^2 \, dx$  という不等式を使っている人もいましたが、 $\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx \right)^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 \, dx$  という不等式は一般には成り立ちません。 $f(x) = c$  (定数関数) の例を考えてみてください。

## 問題 3

平均点 (1) 0.84 点, (2) 0.77 点, (3) 0.72 点, (4) 0.74 点, (5) 0.72 点

出題意図 線形写像に関する典型的な問題です。微分する操作や  $x$  をかける操作は、多項式の空間から多項式の空間への線形写像で、これらを組み合わせた微分演算子も線形写像になります。したがって、基底をとって多項式を数ベクトルに対応付ければ、微分演算子は行列 (表現行列) に対応付けられます。この問題での微分方程式を解くということは、ある微分演算子を作用させて 0 になる多項式を求めることです。これは表現行列をかけて 0 になる数ベクトルを求めることと等価になります。そのような数ベクトルが求まったら、それを多項式に逆対応させれば、元の微分方程式の解が得られます。本問では、この一連の操作を小問の形で行ってもらいました。

多かった間違い

- 講義の最後で同じような例題をやったためか、全般的に良くできていました。間違いは、小問 (1) の計算ミスによるものがほとんどでした。