2008 年度　線形代数 II　期末試験

- 大問題ごとに解答用紙を 1 枚使うこと。
- 解答用紙には，氏名，学籍番号，大問題の番号を記入すること。

問題 1

V を計量線形空間とし，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の内積を $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ で表す。また，$\mathbf{x}$ の長さを $\|\mathbf{x}\|$ で表す。また，f を V から V への線形変換とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) f が直交変換となるための条件を内積を用いて述べよ。

(2) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して次の等式が成り立つことを示せ。

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 4(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{1}$$

(3) f が長さを不変にする変換，すなわち任意の $\mathbf{x} \in V$ に対して $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ が成り立つ変換とする。このとき，f は直交変換であることを示せ。

問題 2

複素数 c に対して，その複素共役を $\bar{c}$ で表す。また，行列およびベクトルに対して，転置と複素共役を同時に行う操作を * で表し，2 本のベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の内積を $\mathbf{x}^*\mathbf{y}$ と定義する。A を $n \times n$ のユニタリ行列，すなわち $A^*A = AA^* = E$（E は単位行列）となる行列とするとき，次の問に答えよ。

(1) A の任意の固有値は，絶対値が 1 の複素数であることを示せ。
（ヒント： $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ と，両辺の * をとった式を合わせて考えよ。）

(2) A の固有値 λ に対する固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とする。このとき，$\mathbf{x}$ は A^{-1} の固有値 $\bar{\lambda}$ に対する固有ベクトルであることを示せ。

(3) $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を A の異なる固有値に対する固有ベクトルとする。このとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交することを示せ。

問題 3

行列

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & -2c \\ -4 & 3 & 5 \\ c & 0 & -2c \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ。

(1) A のすべての固有値を求めよ。

(2) A の固有値がすべて相異なるためには，c がどのような条件を満たせばよいか。また，このとき，各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(3) A の固有ベクトルのうち 1 次独立なものが 2 本しか存在しないのは，c がどんな値のときか。また，このとき 1 次独立な固有ベクトルを 2 本求めよ。

(4) A のある固有値に対する固有ベクトルが 2 次元の線形空間となるのは，c がどんな値のときか。また，このとき 1 次独立な固有ベクトルを 3 本求めよ。