2008 年度　線形代数 II　期末試験解答

問題 1

(1) f が直交変換となるための条件は，任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して

$$(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{1}$$

が成り立つことである。

(2) 長さの定義を用いると，

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - (\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= 4(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{2}$$

よって証明できた。

(3) f が長さを不変にする変換であるとする。小問 (2) の結果と f が線形変換であることを使うと，任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して，

$$\begin{aligned}
(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) &= \frac{1}{4}\left\{\|f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right) \\
&= (\mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{3}$$

よって，f は直交変換である。

問題 2

(1) A の固有値の 1 つを λ とし，対応する規格化された固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ である。また，両辺の * を取った式は $\mathbf{x}^* A^* = \bar{\lambda}\mathbf{x}^*$ となる。後者の式の両辺を前者の式に左からかけると，

$$\mathbf{x}^* A^* A\mathbf{x} = |\lambda|^2 \mathbf{x}^*\mathbf{x}. \tag{4}$$

ここで，$A^*A = E$ と $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 = 1$ を用いると，$1 = |\lambda|^2$，すなわち $|\lambda| = 1$ となる。したがって，λ は絶対値が 1 の複素数である。

(2) まず，ユニタリ行列の定義より A^{-1} が存在し，$A^{-1} = A^*$ であることに注意する。そこで，$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，$\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$。さらに，小問 (1) の結果より $\lambda \neq 0$ に注意して両辺を λ で割ると，

$$A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}\mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x}. \tag{5}$$

これは，$\mathbf{x}$ が A^{-1} の固有値 $\bar{\lambda}$ に属する固有ベクトルであることを示す。

(3) $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$，$A\mathbf{y}=\mu\mathbf{y}$ とし，$\lambda\neq\mu$ とする。小問 (2) より，$\mathbf{y}$ は A^{-1} の固有値 $\bar{\mu}$ に属する固有ベクトルである。これを用いて，$\mathbf{y}^*A\mathbf{x}$ を 2 通りの方法で計算すると，

$$\mathbf{y}^*A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}^*\mathbf{x}, \tag{6}$$
$$\mathbf{y}^*A\mathbf{x}=(A^*\mathbf{y})^*\mathbf{x}=(A^{-1}\mathbf{y})^*\mathbf{x}=(\bar{\mu}\mathbf{y})^*\mathbf{x}=\mu\mathbf{y}^*\mathbf{x}. \tag{7}$$

$\lambda\neq\mu$ より，$\mathbf{y}^*\mathbf{x}=0$。よって，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交する。

問題 3

(1) λ が A の固有値となる条件は，

$$\begin{aligned}
\det(\lambda E-A) &= \begin{vmatrix} \lambda-c & 0 & 2c \\ 4 & \lambda-3 & -5 \\ -c & 0 & \lambda+2c \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-c)(\lambda-3)(\lambda+2c)+2c^2(\lambda-3) \\
&= (\lambda-3)(\lambda^2+c\lambda-2c^2+2c^2) \qquad (8)\\
&= (\lambda-3)\lambda(\lambda+c)=0. \qquad (9)
\end{aligned}$$

よって，固有値は，

$$\lambda=0,\ 3,\ -c \tag{10}$$

となる。

(2) 小問 (1) の結果より，A の固有値がすべて相異なるための条件は $c\neq0,\ -3$ である。このとき，各固有値に対する固有ベクトルは次のように求められる。

(i) $\lambda=0$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，$(\lambda E-A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} -c & 0 & 2c \\ 4 & -3 & -5 \\ -c & 0 & 2c \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

ここで，第 1 式より $-c(x-2z)=0$ で，$c\neq0$ より $x=2z$。このとき，第 3 式は自動的に満たされる。また，これを第 2 式に代入して，$-3y+3z=0$。よって，$y=z$。そこで，$z=1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[2,1,1]$ となる。

(ii) $\lambda=3$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，$(\lambda E-A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} -c+3 & 0 & 2c \\ 4 & 0 & -5 \\ -c & 0 & 2c+3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

ここで，第 1 式，第 3 式より x と z に関する式を立てると，

$$\begin{pmatrix} -c+3 & 2c \\ -c & 2c+3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

この係数行列の行列式は $(-c+3)(2c+3)+2c^2=3(c+3)$ となるが，$c\neq-3$ より，これは 0 でない。したがって，この行列の逆行列が存在するから，これを両辺に左からかけると，$x=z=0$ となる。このとき，式 (12) の 3 つの式はすべて成り立つ。y は任意である。そこで，$y=1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[0,1,0]$ となる。

(iii) $\lambda = -c$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，$(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より，

$$\begin{pmatrix} -2c & 0 & 2c \\ 4 & -c-3 & -5 \\ -c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

ここで，第 1 式より $-2c(x-z) = 0$ で，$c \neq 0$ より $x = z$。このとき，第 3 式は自動的に満たされる。また，これを第 2 式に代入して $(-c-3)y - z = 0$。よって $z = (-c-3)y$。そこで，$y = 1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[-c-3, 1, -c-3]$ となる。

(3) 固有値がすべて相異なるとき，それらに対応する固有ベクトルは 1 次独立だから，1 次独立な固有ベクトルは 3 本存在する。したがって，1 次独立な固有ベクトルが 2 本しか存在しないのは，A の固有値が重根となるときに限られる。ここで，$c = 0$ のときは，次問で見る通り，1 次独立な固有ベクトルを 3 本求めることができる。一方，$c = -3$ のときは，固有値は $\lambda = 3$（重根），$\lambda = 0$（単根）で，それぞれに対する固有ベクトルは次のようになる。

(i) $\lambda = 3$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，前小問と同様にして，

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

ここで，第 1 式より，$6x - 6z = 0$ だから $x = z$。これを第 2 式に代入して，$z = 0$。一方，y は式に出てこないから，任意でよい。よって，$y = 1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[0, 1, 0]$ となる。固有値は重根だが，固有ベクトルは 1 本しか求まらないことに注意する。

(ii) $\lambda = 0$ のとき： 前小問の (i) と同様にして，固有ベクトルは ${}^t[2, 1, 1]$ となる。

以上より，1 次独立な固有ベクトルが 2 本しか存在しないのは $c = -3$ のときで，そのときの固有ベクトルは上記の通りである。

(4) ある固有値に対する固有ベクトルが 2 次元の線形空間となるのは，その固有値が重根となるときである。いま，$c = -3$ の場合は前小問で解析したから，$c = 0$ の場合を調べる。このとき，固有値は $\lambda = 3$（単根），$\lambda = 0$（重根）で，それぞれに対する固有ベクトルは次のようになる。

(i) $\lambda = 3$ のとき：固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，小問 (2) の (ii) と同様にして，

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

ここで，第 1 式より $x = 0$，第 3 式より $z = 0$ となる。このとき，第 2 式は自動的に満たされる。一方，y は式に出てこないから，任意でよい。よって，$y = 1$ とおくと，固有ベクトルは ${}^t[0, 1, 0]$ となる。

(ii) $\lambda = 0$ のとき： 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると，小問 (2) と同様にして，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

ここで，第 2 式より $4x-3y-5z=0$。あとは任意である。よって，固有ベクトルは y，z を任意パラメータとして ${}^t\left[x, y, \frac{1}{5}(4x-3y)\right]$ となる。そこで，特に $x=1$，$y=0$ とすると，${}^t\left[1, 0, \frac{4}{5}\right]$，$x=0$，$y=1$ とすると，${}^t\left[0, 1, -\frac{3}{5}\right]$ という固有ベクトルが得られる。これらは明らかに 1 次独立である。

以上より，固有ベクトルが一意的に定まらないのは $c=0$ のときで，そのとき，3 本の 1 次独立な固有ベクトルを上記のように取ることができる。