2008 年度　線形代数 II　演習問題（第 1 回）

- レポートではなく自習用の演習問題なので，解答を提出する必要はありません。
- 解答は，来週中に線形代数 II のホームページに掲載します。

問題 1
次の集合は線形空間か。そうであれば，そのことを証明せよ。そうでなければ，その理由を述べよ。

(1) 区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ で $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ を満たすものの集合 F_1。

(2) 区間 $[a,b]$ で定義された 2 階微分可能な関数 $f(x)$ で，$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$（$a \le x \le b$）を満たすものの集合 F_2。

(3) 区間 $[a,b]$ で定義された 2 階微分可能な関数 $f(x)$ で，$f''(x) + \{f(x)\}^2 = 0$（$a \le x \le b$）を満たすものの集合 F_3。

(4) ある実数 a，b を用いて $f(x) = a\sin(x+b)$ と書ける関数の集合 F_4。
（ヒント： $f_1, f_2 \in F_4$ のとき，$f_1 + f_2$ を三角関数の加法定理を使って変形してみよ。）

(5) $m \times n$ 行列 A に対し，$A\mathbf{x} = 0$ を満たすベクトル $\mathbf{x}$ の集合 V_1。

(6) $m \times n$ 行列 A に対し，あるベクトル $\mathbf{x}$ を用いて $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ と書けるベクトル $\mathbf{y}$ の集合 V_2。

問題 2
次の線形空間において，与えられた要素の組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\mathbf{R}[x]_2$ における 3 つの要素 $x^2+x+1,\ x^2+2x+3,\ x^2+3x+5$。

(2) $\mathbf{R}[x]_2$ における 3 つの要素 $x^2+x+1,\ x^2+2x+3,\ x^2+3x+4$。

(3) $\mathbf{R}^3$ における 3 本のベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}。 \tag{1}$$

(4) $\mathbf{R}^3$ における 3 本のベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}。 \tag{2}$$

(5) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列の空間 V_1 に属する次の 3 つの要素

$$\begin{aligned} a &= \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots\}, \\ b &= \{1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \cdots\}, \\ c &= \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots\}。 \end{aligned} \tag{3}$$

(6) $[0, 2\pi]$ で定義された関数の空間における 3 つの要素 $\sin x,\ \sin(x+\frac{\pi}{4}),\ \sin(x+\frac{\pi}{2})$。

問題 3

次の線形空間において基底を 1 組求め，空間の次元を求めよ。

(1) 2 次以下の多項式で $f(1) = 0$ を満たすものの空間。

(2) 漸化式 $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$（$n = 1, 2, \ldots$）を満たす数列の空間。

(3) 4×4 の交代行列の空間。

(4) 2×4 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

に対し，$A\mathbf{x} = 0$ を満たす 4 次元ベクトルの空間。

問題 4

任意の 2 次以下の多項式 $f(x)$ に対し，$f(x)$ を問題 2(1) の 3 個の多項式の線形結合として表したときの係数を（順に）a, b, c とする。これにより，$\mathbf{R}[x]_2$ の任意の元 $f(x)$ は $\mathbf{R}^3$ の元 ${}^t[a, b, c]$ に対応付けられる。このとき，$1, x, x^2$ はそれぞれ $\mathbf{R}^3$ のどのような元に対応付けられるか。

問題 5

問題 2(3)，(4) で与えられるベクトル集合の 1 次独立性を，行列式を用いて調べよ。