2008 年度　線形代数 II　演習問題（第 2 回）

- レポートではなく自習用の演習問題なので，解答を提出する必要はありません。
- 解答は線形代数 II のホームページに掲載します。

問題 1

(1) $\mathbf{R}^3$ に属する 2 本のベクトル $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ に対し，

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{b} \tag{1}$$

と定義する。このとき，$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は内積である（すなわち，教科書 p. 78 の (R1) ～ (R4) を満たす）ことを示せ。

(2) 実数を要素とする 2×2 行列 A，B に対し，

$$(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) \tag{2}$$

と定義する（トレースの定義は教科書 p. 7 を参照）。このとき，(A, B) は内積であることを示せ。

問題 2

実数を係数とする 2 次以下の多項式のなす空間を $\mathbf{R}[x]_2$ とする。また，$x_0 = -1$，$x_1 = 0$，$x_2 = 1$ とし，$f, g \in \mathbf{R}[x]_2$ に対して，スカラー (f, g) を以下の小問 (1) あるいは (2) のように定義する。それぞれの場合において，(f, g) は $\mathbf{R}[x]_2$ の内積となるか。内積となる場合は，そのことを示せ。内積とならない場合は，その理由を述べよ。

(1) $(f, g) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)g(x_i)$ と定義する場合。

(2) $(f, g) = \sum_{i=1}^{2} f(x_i)g(x_i)$ と定義する場合。

問題 3

計量線形空間 V の要素の集合 $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ が，V の内積に対して

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3}$$

を満たすとき，F は正規直交系をなすという（すなわち，正規直交系は，正規直交基底から基底であるという性質を抜いた概念である）。いま，$[0, 2\pi]$ で定義された関数の空間で，内積が $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ で定義されているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \right\}$ が正規直交系をなすことを示せ。

(2) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right\}$ が正規直交系をなすことを示せ。ただし，m はある自然数とする。（ヒント： 三角関数の積を和に直す公式を用いよ。）

問題 4

V を計量線形空間とし，$x, y \in V$ とする。

(1) シュワルツの不等式の証明を見直すことにより，等号が成立するのはどんな場合であるかを考えよ。

(2) ノルムに関する不等式

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \tag{4}$$

が成り立つことを示せ。（ヒント： 両辺は非負だから，両辺を 2 乗した不等式を示せばよい。また，必要に応じてノルムの定義を用い，ノルムを内積で書き換えよ。）

問題 5

(1) $\mathbf{R}^3$ に属する 3 本のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

を通常の内積に対し，グラム・シュミットの方法により正規直交化せよ。

(2) 次の行列を QR 分解せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$