2008 年度　線形代数 II　演習問題（第 3 回）

- レポートではなく自習用の演習問題なので，解答を提出する必要はありません。
- 解答は，来週中に線形代数 II のホームページに掲載します。

問題 1

(1) $\mathbf{R}^3$ に属する 3 本のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

を，演習問題（第 2 回）の問題 1 (1) で定義した内積に対し，グラム・シュミットの方法により正規直交化せよ。

(2) $1, x, x^2$ を，演習問題（第 2 回）の問題 1 (2) で定義した内積に対し，グラム・シュミットの方法により正規直交化せよ（これにより得られる多項式を Laguerre（ラゲル）多項式と呼ぶ）。

問題 2

グラム・シュミットの直交化で出てくる中間段階のベクトル

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{e}_i \tag{2}$$

が，それまでに求めたベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}$ のすべてと直交することを示せ。（ヒント： 上式を用いて実際に $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ を計算し，$\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{k-1}$ が互いに直交することを用いる。）

問題 3

(1) $\mathbf{R}^3$ に属する 3 本のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

を通常の内積に対し，グラム・シュミットの方法により正規直交化せよ。

(2) 次の行列を QR 分解せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

問題 4

実数を係数とする 2 次以下の多項式のなす空間を $\mathbf{R}[x]_2$ とする。このとき，微分方程式

$$\frac{1}{2}x(x-2)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-(x-1)\frac{df(x)}{dx}+f(x)=0 \tag{5}$$

の $\mathbf{R}[x]_2$ における解を，次の手順で求めよ。

(1) $f\in\mathbf{R}[x]_2$ に対して $\frac{1}{2}x(x-2)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-(x-1)\frac{df(x)}{dx}+f(x)$ を対応させる写像を F とすると，F は $\mathbf{R}[x]_2$ から $\mathbf{R}[x]_2$ 自身への線形写像である。$\mathbf{R}[x]_2$ の基底を $\{1,x,x^2\}$ とするとき，F の表現行列 A を求めよ。

(2) $N_A=\left\{\mathbf{u}\in\mathbf{R}^3 \mid A\mathbf{u}=\mathbf{0}\right\}$ とする。N_A の基底を 1 組求めよ。

(3) $N_F=\{f\in\mathbf{R}[x]_2 \mid F(f)=0\}$ とする。小問 (2) の結果を用いて N_F の基底を 1 組求めよ。

(4) N_F の任意の要素を，パラメータを含む式で表せ。

(5) 小問 (4) で求めた式を微分方程式 (5) に代入し，解となっていることを示せ。