

2008年度 線形代数学II 演習問題(第4回)

- レポートではなく自習用の演習問題なので、解答を提出する必要はありません。
- 解答は線形代数学IIのホームページに掲載します。

問題1

f を線形空間 V から線形空間 W への線形写像とすると、次の問に答えよ。

- (1) $\text{Im } f$ は W の部分空間であることを示せ。
(ヒント: $y_1, y_2 \in \text{Im } f$ とすると, $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ であるような $x_1, x_2 \in V$ が存在する。このとき, $y_1 + y_2, ky_1$ が, それぞれ V のある要素に f を作用させたものとして書けることを示せ。)
- (2) $\text{Ker } f$ は V の部分空間であることを示せ。
(ヒント: $x_1, x_2 \in \text{Ker } f$ とすると, $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$ である。このとき, $x_1 + x_2, kx_1$ も, f を作用させると 0 になることを示せ。)

問題2

A を実数を要素とする $n \times n$ の行列とする。このとき、「任意の n 次元実数ベクトル x, y に対して ${}^t x {}^t A A y = {}^t x y \Leftrightarrow {}^t A A = E$ 」を示せ。

(ヒント: 「 \Leftarrow 」は明らか。「 \Rightarrow 」を示すため、第 i 要素のみが 1, 他が 0 の n 次元ベクトルを e_n とし, $x = e_i, y = e_j$ として左辺の式がどうなるかを考えよ。)

問題3

平面上の点 $x = {}^t[x, y]$ に対して別の点 $x' = {}^t[x', y']$ を対応させる線形変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1)$$

は、直線 $y = (\tan \frac{\theta}{2}) x$ に対する折り返しであることを示せ。

問題4

A を実数を要素とする $n \times n$ 行列とすると、次の問に答えよ。

- (1) $A^2 = O$ ならば, A のすべての固有値は 0 であることを示せ。
(ヒント: $A^2 = O$ でも $A = O$ とは限らない。)
- (2) λ, x が A の固有値・固有ベクトルならば, λ^2, x は A^2 の固有値・固有ベクトルであることを示せ。
- (3) A が交代行列ならば, 固有値はすべて純虚数(実部が 0 の複素数)であることを示せ。また, 異なる固有値 λ, μ に属する固有ベクトル x, y は直交することを示せ。
(ヒント: A の要素が実数でも, 固有値・固有ベクトルが実数とは限らない。前半では $x^* A x$, 後半では $x^* A y$ を考え, それぞれ 2 通りのしかたで計算せよ。)

問題 5

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ で張られる空間を V とし, V から V への線形変換 F を $F(f)(x) = f(x+c)$ ($f \in V, 0 \leq c < 2\pi$) と定義する。すなわち F は x を $x+c$ で置き換える変換である。次の問に答えよ。

- (1) V の基底として $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ を取るとき, V の表現行列を求めよ。
- (2) V における内積を, $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ ($f, g \in V$) と定義する。このとき, F は直交変換となることを示せ。

問題 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とするとき, 次の問に答えよ。

- (1) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。
- (2) 正則行列 P , 対角行列 D によって $P^{-1}AP = D$ と対角化を行うとき, P, D を求めよ。
- (3) n を正の整数とするととき, A^n を計算せよ (A^n の各要素を n の関数として表せ)。