2008 年度　線形代数 II　第 1 回レポート課題

2008 年 11 月 7 日（金）の授業終了時に提出してください．あるいは，それ以前に工学部 3 号館南 479 号室に提出してください．

問題 1

次の集合が線形空間であることを示せ．また，各空間の次元を求め，基底を 1 組求めよ．

(1) x の 2 次以下の多項式で $\frac{d^2f}{dx^2} - x\frac{df}{dx} + 2f = 0$ を満たすものの集合 F_1．

(2) 2×2 の行列 A で，$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対し，$AB + BA = O$ を満たすものの集合 M_1．

(3) 4 次元の数ベクトルの集合

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x - y + z - w = 0 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

問題 2

a, b, c, d を相異なる実数，f_1, f_2, f_3, f_4 を $\mathbf{R}[x]_3$ の 4 つの要素とし，行列 V を

$$V = \begin{bmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) & f_4(b) \\ f_1(c) & f_2(c) & f_3(c) & f_4(c) \\ f_1(d) & f_2(d) & f_3(d) & f_4(d) \end{bmatrix} \tag{2}$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f_1, f_2, f_3, f_4 が 1 次従属のとき，$\det(V) = 0$ であることを示せ．
（ヒント： f_1, f_2, f_3, f_4 が 1 次従属のとき，全部が 0 ではないスカラー k_1, k_2, k_3, k_4 が存在して，$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x) = 0$ が恒等的に成り立つ．これを使って行列式を変形せよ．）

(2) $\det(V) = 0$ のとき，f_1, f_2, f_3, f_4 は 1 次従属であることを示せ．
（ヒント： $\det(V) = 0$ のとき，$V\mathbf{y} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$ が存在する．このとき，多項式 $y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x)$ についてどんなことが言えるか．）

問題 3

(1) 問題 1(3) の線形空間 V_1 に対し，正規直交基底を 1 組求めよ．

(2) 問題 1(3) の線形空間 V_1 に対し，直交補空間の正規直交基底を 1 組求めよ．

問題 4

$2n+1$ 個の関数 $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx$ が張る空間を V とし，$f, g \in V$ に対して

$$(f, g) = \int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx \tag{3}$$

と定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1) (f, g) は内積であることを示せ．ただし,「$h(x) \geq 0$ を満たす連続関数 $h(x)$ について，$\int_0^{\pi} h(x)dx = 0$ ならば $h(x) = 0$」であることを使ってよい．

(2) $n = 1$ の場合を考える．内積 (f, g) に対して

$$f_0(x) = a_0, \quad f_1(x) = b_0 + b_1 \cos x, \quad f_2(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{4}$$

が正規直交基底となるように，定数 $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2$ を一組定めよ．