2008 年度　線形代数 II　第 2 回レポート 課題

2009 年 1 月 9 日（金）の授業終了時に提出してください。1 月 9 日の授業に出られない人は，1 月 13 日までに工学部 3 号館南 479 号室に提出してください。

問題 1

3 次元空間において，原点を通り，法線ベクトルが ${}^t[a,b,c]$ である平面を P とする。いま，空間中の点 $\mathbf{x} = {}^t[x,y,z]$ に対し，これと平面 P に関して対称の位置にある点を $\mathbf{x}' = {}^t[x',y',z']$ とする。$\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{x}'$ を対応させる写像（変換）を f とするとき，次の問に答えよ。

(1) x', y', z' を a, b, c, x, y, z で表せ。また，f が線形変換であることを示し，$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ と書いたときの行列 A を求めよ。
（ヒント： $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ が P に関して対称の位置にある条件は，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ を結ぶ線分が P に垂直で，かつその中点が P 上にあることである。）

(2) f が直交変換であることを示せ。

(3) A の固有値・固有ベクトルの組をすべて求めよ。

(4) 小問 (3) で求めた各固有ベクトルが平面 P に対してそれぞれどのような向きにあるかを述べ，その固有値がなぜその値になるかを幾何学的に説明せよ。

問題 2

(1) $A^2 = A$ ならば，A の固有値は 0 または 1 のみであることを示せ。

(2) $f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E$ を行列 A についての多項式とする。このとき，λ，$\mathbf{x}$ が A の固有値・固有ベクトルならば，$f(\lambda)$，$\mathbf{x}$ は $f(A)$ の固有値・固有ベクトルであることを示せ。

(3) A が対称行列ならば，固有値はすべて実数であることを示せ。また，異なる固有値 λ，μ に属する固有ベクトル $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ は直交することを示せ。

問題 3

3×3 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値・固有ベクトルの組をすべて求めよ。

(2) A を対角化せよ。

(3) n を正の整数とするとき，A^n を求めよ（A^n の各要素を n の式で表せ）。

問題 4

V を 4 次元の計量線形空間とし，その正規直交基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ とする。また，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ で張られる V の部分空間を V' とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) V の任意の元 v を基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ の線形結合により，

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 + c_4\mathbf{e}_4 \tag{2}$$

と表す。このとき，各 c_i（$i = 1, 2, 3, 4$）は $\mathbf{v}$ と $\mathbf{e}_i$ の内積により $c_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ と書けることを示せ。
（ヒント： 式 (2) の両辺と $\mathbf{e}_i$ の内積をとり，$\{\mathbf{e}_i\}$ の正規直交性を用いよ。）

(2) V' の元 $\mathbf{v}'$ で，$\mathbf{v}$ との距離が最も小さいもの，すなわち，$\|\mathbf{v}' - \mathbf{v}\|^2$ が最小になるものを求めることを考える。このような $\mathbf{v}'$ を $\mathbf{v}' = c_1{}'\mathbf{e}_1 + c_2{}'\mathbf{e}_2$ と表すとき，$c_1' = c_1$，$c_2' = c_2$ であることを示せ。
（ヒント： $\|\mathbf{v}' - \mathbf{v}\|^2$ を内積を用いて書き直し，さらに $\{\mathbf{e}_i\}$ の正規直交性を用いて整理せよ。得られる式を c_1'，c_2' の関数と見ると，これは c_1'，c_2' がどんな値のときに最小値をとるか。）