

## 2008年度 線形代数II 第1回レポート解答

### 問題1

集合  $V$  が線形空間であることを示すには、教科書 P80 の定義 4.1 にある

- 任意の  $u, v \in V$  に対して,  $u + v \in V$
- 任意の  $v \in V$  と任意のスカラー  $k$  に対して,  $kv \in V$

が成り立つことを示せばよい.

#### (1) [線形空間の証明]

$f_1, f_2 \in F_1$  とする. つまり,

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} - x \frac{df_1}{dx} + 2f_1 = 0$$

$$\frac{d^2 f_2}{dx^2} - x \frac{df_2}{dx} + 2f_2 = 0$$

が成り立つとする.

- $f_1 + f_2$  について

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(f_1 + f_2)}{dx^2} - x \frac{d(f_1 + f_2)}{dx} + 2(f_1 + f_2) \\ &= \frac{d^2 f_1}{dx^2} - x \frac{df_1}{dx} + 2f_1 + \frac{d^2 f_2}{dx^2} - x \frac{df_2}{dx} + 2f_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

よって,  $f_1 + f_2 \in F_1$  となる.

- $k$  を任意のスカラー とすると,  $kf_1$  について

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(kf_1)}{dx^2} - x \frac{d(kf_1)}{dx} + 2(kf_1) \\ &= k \frac{d^2 f_1}{dx^2} - kx \frac{df_1}{dx} + 2kf_1 \\ &= k \left( \frac{d^2 f_1}{dx^2} - x \frac{df_1}{dx} + 2f_1 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって,  $kf_1 \in F_1$  となる.

以上より,  $F_1$  は線形空間である.

#### [次元と基底]

任意の実数  $a, b, c$  を用いて,  $f(x) = ax^2 + bx + c \in F_1$  とおく.

$\frac{d^2 f}{dx^2} - x \frac{df}{dx} + 2f = 0$  の条件から

$$\begin{aligned} & 2a - 2ax^2 - bx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= bx + 2a + 2c \\ &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases}$$

これより,  $f(x)$  は任意の実数を用いて

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - a \\ &= a(x^2 - 1) \end{aligned}$$

という形で書ける.

よって,  $x^2 - 1$  は  $F_1$  の基底となる. また,  $\dim F_1 = 1$  である.

## (2) [線形空間の証明]

$A_1, A_2 \in M_1$  とする. つまり,

$$A_1 B + B A_1 = O$$

$$A_2 B + B A_2 = O$$

が成り立つとする.

- $A_1 + A_2$  について

$$\begin{aligned} &(A_1 + A_2)B + B(A_1 + A_2) \\ &= A_1 B + A_2 B + B A_1 + B A_2 \\ &= (A_1 B + B A_1) + (A_2 B + B A_2) \\ &= O \end{aligned}$$

が成立する. よって,  $A_1 + A_2 \in M_1$  となる.

- $k$  を任意のスカラー とすると,  $kA_1$  について

$$(kA_1)B + B(kA_1) = k(A_1 B + B A_1) = O$$

したがって,  $kA_1 \in M_1$  となる.

以上より,  $M_1$  は線形空間である.

## [次元と基底]

$a, b, c, d$  を任意の実数として,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_1$  とおく.

すると,  $AB, BA$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. ここで  $AB + BA = O$  の条件より

$$\begin{cases} b+c &= 0 \\ a+d &= 0 \\ d+a &= 0 \\ c+b &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a &= -d \\ b &= -c \end{cases}$$

これより  $A$  は任意定数を用いて

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

という形で書ける.

ここで,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  が互いに 1 次独立なのは明らかである.

よって, この 2 つの行列は  $M_1$  の基底となる. また,  $\dim M_1 = 2$  となる.

### (3) [線形空間の証明]

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \in V_1 \text{ とする. つまり } \begin{cases} x_1 - y_1 + z_1 - w_1 & = & 0 \\ x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 4w_1 & = & 0 \\ x_2 - y_2 + z_2 - w_2 & = & 0 \\ x_2 + 2y_2 + 3z_2 + 4w_2 & = & 0 \end{cases} \text{ が成り立つと}$$

する.

$$\bullet \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \\ w_1 + w_2 \end{bmatrix} \text{ について}$$

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) - (w_1 + w_2) \\ &= (x_1 - y_1 + z_1 - w_1) + (x_2 - y_2 + z_2 - w_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) + 4(w_1 + w_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 4w_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2 + 4w_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって,  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V_1$  となる.

$$\bullet k \text{ を任意のスカラーとすると, } k\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \\ kw_1 \end{bmatrix} \text{ について,}$$

$$kx_1 - ky_1 + kz_1 - kw_1 = k(x_1 - y_1 + z_1 - w_1) = 0$$

$$kx_1 + 2ky_1 + 3kz_1 + 4kw_1 = k(x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 4w_1) = 0$$

したがって,  $k\mathbf{v}_1 \in V_1$  となる.

以上より,  $V_1$  は線形空間である.

### [次元と基底]

$x, y, z, w$  が満たすべき条件から,

$$\begin{cases} x - y + z - w & = & 0 \\ x + 2y + 3z + 4w & = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x & = & -5z - 2w \\ 3y & = & -2z - 5w \end{cases}$$

よって、 $v$  は任意定数  $s, t$  を用いて

$$v = \begin{bmatrix} 5s + 2t \\ 2s + 5 \\ -3s \\ -3t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

の形で書ける.

ここで、 $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$  と  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$  が互いに 1 次独立なのは明らかである.

よって、この 2 つのベクトルは  $V_1$  の基底となる. また、 $\dim V_1 = 2$  となる.

## 問題 2

(1)  $f_1, f_2, f_3, f_4$  は一次従属なので、全部が 0 でないスカラー  $k_1, k_2, k_3, k_4$  が存在して、

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x) = 0$$

が成り立つ.

ここで、 $k_1 \neq 0$  とすると、

$$f_1(x) = -\frac{k_2}{k_1} f_2(x) - \frac{k_3}{k_1} f_3(x) - \frac{k_4}{k_1} f_4(x)$$

と書ける. これを  $\det(V)$  の式に代入すると、

$$\begin{aligned} \det(V) &= \begin{vmatrix} f_1(a) & \cdots & f_4(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(d) & \cdots & f_4(d) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{k_2}{k_1} f_2(a) - \frac{k_3}{k_1} f_3(a) - \frac{k_4}{k_1} f_4(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{k_2}{k_1} f_2(d) - \frac{k_3}{k_1} f_3(d) - \frac{k_4}{k_1} f_4(d) & f_2(d) & f_3(d) & f_4(d) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ 0 & f_2(b) & f_3(b) & f_4(b) \\ 0 & f_2(c) & f_3(c) & f_4(c) \\ 0 & f_2(d) & f_3(d) & f_4(d) \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ただし、最後の等号では、

第 1 列に第 2 列の  $\frac{k_2}{k_1}$  倍、

第 1 列に第 3 列の  $\frac{k_3}{k_1}$  倍、

第 1 列に第 4 列の  $\frac{k_4}{k_1}$  倍、

を加えてかつ、行列式の値が列基本変形 II(p.17) によって変わらないことを用いた. また、 $k_1 \neq 0$  の時以外でも上記と同様のことが言える. よって、 $f_1, f_2, f_3, f_4$  が一次従属のとき、 $\det(V) = 0$  である.

(2)  $\det(V) = 0$  の時,  $V\mathbf{y} = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$  が存在するので,

$$\begin{aligned} V\mathbf{y} &= \begin{pmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) & f_4(b) \\ f_1(c) & f_2(c) & f_3(c) & f_4(c) \\ f_1(d) & f_2(d) & f_3(d) & f_4(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 f_1(a) + y_2 f_2(a) + y_3 f_3(a) + y_4 f_4(a) \\ y_1 f_1(b) + y_2 f_2(b) + y_3 f_3(b) + y_4 f_4(b) \\ y_1 f_1(c) + y_2 f_2(c) + y_3 f_3(c) + y_4 f_4(c) \\ y_1 f_1(d) + y_2 f_2(d) + y_3 f_3(d) + y_4 f_4(d) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

よって,  $F(x) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x)$  とおくと,  $F(x)$  は 3 次以下の多項式で, かつ相異なる 4 点  $x = a, b, c, d$  において 0 となる. そのような多項式は 0 しかないので,  $F(x) = 0$ . すなわち, 全てが 0 ではない実数  $y_1, y_2, y_3, y_4$  について  $y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x) = 0$  が恒等的に成り立つ. よって,  $f_1, f_2, f_3, f_4$  は 1 次従属である.

(補足) 上記の解答例では, 3 次以下の多項式で相異なる 4 点  $a, b, c, d$  で 0 となるものは 0 しかないことを用いた. この事実は証明なしで使ってもよいが, 以下のようにすれば証明できる.

この多項式を  $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$  とおくと, これが 4 点  $a, b, c, d$  で 0 となるという条件は次のように書ける.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ここで, 左辺の行列は van der Monde 行列なので, 教科書の例題 3.4(p.66) より  $a, b, c, d$  が全て異なるとき, その行列式は 0 でない. よって逆行列が存在するから, それを左からかけると,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が得られ, 多項式は 0 であることがわかる.

### 問題 3

(1) 問題 1 (3) の結果より, 線形空間  $V_1$  の任意の元  $\mathbf{v}$  は,  $s, t$  を任意定数として,

$$\mathbf{v} = s \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s + 2t \\ 2s + 5t \\ -3s \\ -3t \end{bmatrix} \quad \cdots (*)$$

の形で書ける.

求める正規直交基底を  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  とすると,  $\mathbf{v}_1$  は (\*) の形のベクトルで  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1$  (長さが 1) を満たすものを自由を選ぶことができる. そこで,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s = \frac{1}{\sqrt{38}}, t = 0)$$

とする.  $\mathbf{v}_2$  は,  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$  かつ  $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1$  の条件から  $s, t$  を決定することで,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1102}} \begin{bmatrix} 4 \\ -25 \\ -10 \\ 19 \end{bmatrix} \quad (s = \frac{10}{3\sqrt{1102}}, t = -\frac{19}{3\sqrt{1102}})$$

となる.

(2)  $V_1$  の直交補空間は,  $V_1^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2 = 0\}$  である.

ただし,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  は問題 1(3) で求めた  $V_1$  の基底である. ここで,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$  とおくと

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

が導かれる. ここから問題 1 (3) と同様の手順で計算を進めると,  $\mathbf{x}$  が任意定数  $s, t$  により

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

という形で書けることが分かる.

$V_1^\perp$  の正規直交基底を  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  とすれば, (1) と同様の手順で,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{78}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s = \frac{1}{\sqrt{78}}, t = 0)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2262}} \begin{bmatrix} -4 \\ 25 \\ 10 \\ 39 \end{bmatrix} \quad (s = \frac{10}{7\sqrt{2262}}, t = \frac{39}{7\sqrt{2262}})$$

が求められる.

(別解)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

までは解答例と同じである．ここで， $x_1 = 3s, x_2 = 3t$  とおくと，

$$\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

と書ける．求める正規直交基底を  $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$  とすると，(1) と同様の手順で，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s = \frac{1}{\sqrt{38}}, t = 0)$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1102}} \begin{bmatrix} -10 \\ 19 \\ -4 \\ 25 \end{bmatrix} \quad (s = -\frac{10}{3\sqrt{1102}}, t = \frac{19}{3\sqrt{1102}})$$

が求められる．

## 問題 4

(1)  $(f, g)$  が教科書の P78 (複素数まで含めると P92) にある 4 つの性質を満たすことを示せばよい．

[R1]

$$(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)dx = \int_0^\pi g(x)f(x)dx = (g, f)$$
$$\therefore (f, g) = (g, f)$$

[R2]

$$((f+g), h) = \int_0^\pi (f(x)+g(x))h(x)dx = \int_0^\pi f(x)h(x)dx + \int_0^\pi g(x)h(x)dx = (f, h) + (g, h)$$
$$\therefore ((f+g), h) = (f, h) + (g, h)$$

[R3]

$k$  を任意のスカラーとする．

$$(kf, g) = \int_0^\pi (kf(x))g(x)dx = k \int_0^\pi f(x)g(x)dx = k(f, g)$$
$$(f, kg) = \int_0^\pi f(x)(kg(x))dx = k \int_0^\pi f(x)g(x)dx = k(f, g)$$
$$\therefore (kf, g) = (f, kg) = k(f, g)$$

[R4]

$$(f, f) = \int_0^\pi f(x)f(x)dx = \int_0^\pi (f(x))^2 dx \geq 0 \quad (\because (f(x))^2 \geq 0)$$

また

$$(f, f) = \int_0^\pi (f(x))^2 dx = 0 \implies (f(x))^2 = 0 \\ \therefore f(x) = 0$$

以上より,  $(f, f) \geq 0$  で等号成立は  $f = 0$  の場合のみ

以上 R1 から R4 までを  $(f, g)$  は満たすので内積であると言える.

(2)  $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x)\}$  が正規直交基底となるためには,

$$\begin{cases} (f_0, f_0) = 1, & (f_0, f_1) = 0 \\ (f_1, f_1) = 1, & (f_1, f_2) = 0 \\ (f_2, f_2) = 1, & (f_0, f_2) = 0 \end{cases}$$

となるように  $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2$  を定めればよい.

したがって,

$$\begin{cases} (f_0, f_0) = 1 \\ (f_1, f_1) = 1 \\ (f_2, f_2) = 1 \\ (f_0, f_1) = 0 \\ (f_1, f_2) = 0 \\ (f_0, f_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0^2 \pi = 1 \\ b_0^2 \pi + \frac{1}{2} b_1^2 \pi = 1 \\ c_0^2 \pi + \frac{1}{2} c_1^2 \pi + \frac{1}{2} c_2^2 \pi + 4c_0 c_2 = 1 \\ a_0 b_0 \pi = 0 \\ b_0 c_0 \pi + 2b_0 c_2 + \frac{1}{2} b_1 c_1 \pi = 0 \\ a_0 c_0 \pi + 2a_0 c_2 = 0 \end{cases}$$

を解くことで

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ b_0 = 0 \\ b_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ c_0 = -\sqrt{\frac{8}{\pi^3 - 8\pi}} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{\pi^2 - 8}} \end{cases}$$

が求まる.

以上より

$$\begin{cases} f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x \\ f_2(x) = -\sqrt{\frac{8}{\pi^3 - 8\pi}} + \sqrt{\frac{2\pi}{\pi^2 - 8}} \sin x \end{cases}$$

となる.

(補足) 今回解答の中で求めた基底は一例であり, 一意的なものではない.