

2008年度 線形代数II 第2回レポート解答

問題1

(1)

P は原点を通る平面なので,

$$P : ax + by + cz = 0$$

と書くことができる.

また, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ を結んだ平面 P 上の点を M とすると, M は

$$M : \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2} \right)$$

と書くことができるので, 上式に代入して,

$$a \frac{x+x'}{2} + b \frac{y+y'}{2} + c \frac{z+z'}{2} = 0 \quad (1)$$

また, $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ は平面 P に対して垂直, つまり法線 $\mathbf{n}(= (a, b, c))$ と平行であるので任意の実数 k を用いて

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = k\mathbf{n}$$

と書ける.

$$\therefore (x' - x, y' - y, z' - z) = (ka, kb, kc)$$

$$x' = ka + x \quad (2)$$

$$y' = kb + y \quad (3)$$

$$z' = kc + z \quad (4)$$

式 (1)~(4) から

$$k = -\frac{2(ax + by + cz)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

(注) 法線ベクトルは零ベクトルでないから $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ である.

$$x' = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)x - 2aby - 2caz}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$y' = \frac{(c^2 + a^2 - b^2)y - 2bcz - 2abx}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$z' = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)z - 2cax - 2bcy}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$\therefore \mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ と書いた時,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 - a^2 & -2ab & -2ca \\ -2ab & c^2 + a^2 - b^2 & -2bc \\ -2ca & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となるので,

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 - a^2 & -2ab & -2ca \\ -2ab & c^2 + a^2 - b^2 & -2bc \\ -2ca & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と書けるから, f は明らかに線形変換である.

(2)

教科書 P.118 より, 直行変換であることを示すには任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ であることを示せばよい.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) &= (A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{y}) \\ &= {}^t(A\boldsymbol{x})(A\boldsymbol{y}) \\ &= {}^t\boldsymbol{x}^t A A \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

ここで, ${}^t A A$ を計算すると単位行列 E となるので,

$${}^t\boldsymbol{x}^t A A \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

$\therefore f$ は直交変換である.

(3)

行列 A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \det(\lambda E - A) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (\lambda - 1)(a^2 + b^2 + c^2) + 2a^2 & 2ab & 2ca \\ 2ab & (\lambda - 1)(a^2 + b^2 + c^2) + 2b^2 & 2bc \\ 2ca & 2bc & (\lambda - 1)(a^2 + b^2 + c^2) + 2c^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $(\lambda - 1)(a^2 + b^2 + c^2) = \bar{\lambda}$ とおくと,

$$\begin{aligned} &= (\bar{\lambda} + 2a^2)(\bar{\lambda} + 2b^2)(\bar{\lambda} + 2c^2) + 16a^2b^2c^2 - 4c^2a^2(\bar{\lambda} + 2b^2) - 4b^2c^2(\bar{\lambda} + 2a^2) - 4a^2b^2(\bar{\lambda} + 2c^2) \\ &= \bar{\lambda}^2\{\bar{\lambda} - 2(a^2 + b^2 + c^2)\} \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{\lambda} = 0, 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\lambda = \pm 1 \quad (\because a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

$\lambda = 1$ の時,

$$\frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ca \\ ab & b^2 & bc \\ ca & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

これを整理すると

$$ax + by + cz = 0$$

を得る.

任意の実数 k, l を用いて $z = k, y = l$ とすると,

$$x = \frac{-(bl + ck)}{a}$$

(注) a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 でないから、一般性を失うことなく $a \neq 0$ としてよい.

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{v}_{\lambda=1} &= \begin{pmatrix} \frac{-(bl+ck)}{a} \\ l \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} l + \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k\end{aligned}$$

従って, $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

$\lambda = -1$ の時,

$$\frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} -(b^2 + c^2) & ab & ca \\ ab & -(c^2 + a^2) & bc \\ ca & bc & -(a^2 + b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

これを整理すると,

$$\begin{aligned}bx &= ay \\ cy &= bz\end{aligned}$$

$z = k$ とすると,

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{c}k \\ y &= \frac{b}{c}k \\ \therefore \boldsymbol{v}_{\lambda=-1} &= k \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

従って, $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルとして $k = c$ とすると $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ がとれる.

(4)

$\boldsymbol{v}_{\lambda=1}$ は平面上にあり, $\boldsymbol{v}_{\lambda=-1}$ は法線ベクトルと平行になっている.

- $A\boldsymbol{v}_{\lambda=1} = \boldsymbol{v}_{\lambda=1}$ $\boldsymbol{v}_{\lambda=1}$ は平面上の点なので変換 f を作用させても変わらない.
- $A\boldsymbol{v}_{\lambda=-1} = -\boldsymbol{v}_{\lambda=-1}$ $\boldsymbol{v}_{\lambda=-1}$ は法線ベクトルと平行なので変換 f を作用させると逆方向を向く.

ということをそれぞれ意味している.

問題 2

(1)

A の固有値を λ , その固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

両辺に左から A をかけると

$$A^2\boldsymbol{x} = \lambda A\boldsymbol{x}$$

ここで, $A^2 = A, A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \lambda^2\boldsymbol{x} \\ \text{上の 2 式から } \lambda &= \lambda^2 \\ \therefore \lambda(\lambda - 1) &= 0 \\ \lambda &= 0, 1 \end{aligned}$$

以上より, $A = A^2$ の時, A の固有値は 0 または 1 のみである.

(2)

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の時に $f(A)\boldsymbol{x} = f(\lambda)\boldsymbol{x}$ であることを示す.

上式の両辺に左から A をかけると,

$$\begin{aligned} A \cdot A\boldsymbol{x} &= \lambda A\boldsymbol{x} \\ A^2\boldsymbol{x} &= \lambda^2\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

これを繰り返すと

$$\begin{aligned} A^3\boldsymbol{x} &= \lambda^3\boldsymbol{x} \\ &\vdots \\ A^n\boldsymbol{x} &= \lambda^n\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} \therefore a_n A^n \boldsymbol{x} + a_{n-1} A^{n-1} \boldsymbol{x} + a_1 n A \boldsymbol{x} + a_0 E \boldsymbol{x} &= a_n \lambda^n \boldsymbol{x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} \boldsymbol{x} + a_1 n \lambda \boldsymbol{x} + a_0 E \boldsymbol{x} \\ (a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + a_1 n A + a_0 E) \boldsymbol{x} &= (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_1 n \lambda + a_0 E) \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

以上より, $f(A)\boldsymbol{x} = f(\lambda)\boldsymbol{x}$ であることが示された.

(3)

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

において, $\boldsymbol{x}$ の共役転置を左からかけると

$$\boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x}$$

また、 A は実対称行列で $A = A^*$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* A^* \boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x} \\ (A\boldsymbol{x})^* \boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x} \\ (\lambda \boldsymbol{x})^* \boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x} \\ \bar{\lambda} \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x} \\ (\bar{\lambda} - \lambda) \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ なので

$$\bar{\lambda} = \lambda$$

以上より、共役転置をとっても値が変わらないので、固有値はすべて実数である。
次に、異なる固有値 λ, μ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が直交することを示す。

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

の両辺と $\boldsymbol{y}$ との内積をとると、

$$A(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

ここで、 $A = {}^t A$ なので、 $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} \therefore (A\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\ \mu \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\ \mu \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= \lambda \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\ (\mu - \lambda) \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= 0 \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= 0 \quad (\because \mu \neq \lambda) \end{aligned}$$

以上より、 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は直交する。

問題 3

(1)

行列 A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ は

$$\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 4 & \lambda - 2 & 2 \\ 6 & 0 & \lambda - 8 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$$

よって、 A の固有値は $\lambda = 2, 4, 5$

- $\lambda = 2$ のとき

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを解くと、 $y =$ 任意の実数、 $x = z = 0$ が得られる。よって求める固有ベクトルは

$$\mathbf{x}_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$ のとき

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを解くと、 $3x = 6y = -2z$ が得られる。よって求める固有ベクトルは

$$\mathbf{x}_{\lambda=4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$ のとき

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを解くと、 $y = 0, 2x = -z$ が得られる。よって求める固有ベクトルは

$$\mathbf{x}_{\lambda=5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

[注意] 上記の固有ベクトルに 0 でない定数をかけたベクトルも固有ベクトルとなる。

(2)

(1) で求めた固有ベクトルを左から順に並べた行列を P とすると,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(3)

教科書 P.135 より

$$\begin{aligned} A^n &= P \Sigma P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^{n+1} - 3 \cdot 5^n & 0 & 2 \cdot 4^n - 2 \cdot 5^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 4^n & 2^n & -2^n + 4^n \\ -6 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n & 0 & -3 \cdot 4^n + 4 \cdot 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 4

(1)

$\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{e}_1 + c_2 \boldsymbol{e}_2 + c_3 \boldsymbol{e}_3 + c_4 \boldsymbol{e}_4$ の両辺と $\boldsymbol{e}_i$ の内積をとると,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i = c_1 \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_i + c_2 \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_i + c_3 \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_i + c_4 \boldsymbol{e}_4 \cdot \boldsymbol{e}_i$$

ここで, $\{\boldsymbol{e}_i\}$ の正規直交性より,

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

なので,

$$c_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i$$

(2)

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}\|^2 &= {}^t(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}) \\ &= {}^t\{(c'_1 - c_1)\boldsymbol{e}_1 + (c'_2 - c_2)\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 + c_4\boldsymbol{e}_4\}\{(c'_1 - c_1)\boldsymbol{e}_1 + (c'_2 - c_2)\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 + c_4\boldsymbol{e}_4\} \\ &= (c'_1 - c_1)^2 + (c'_2 - c_2)^2 + c_3^2 + c_4^2 \quad (\because \{\boldsymbol{e}_i\} \text{ の正規直交性}) \end{aligned}$$

ここで, 各項は 0 以上であるので, 上式が最小となるのは

$$c'_1 - c_1 = 0$$

$$c'_2 - c_2 = 0$$

の時である.

すなわち $c'_1 = c_1, c'_2 = c_2$ の時, $\|\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}\|^2$ は最小値をとる.