

2007 年度 計算アルゴリズム 中間試験問題

(A4 用紙 1 枚表裏の自筆メモと電卓持込み可, 各問題毎に解答用紙 1 枚使用)

問題 1

非線形方程式 $f(x) = 0$ をニュートン法により解くことを考える。真の解を $x = \xi$ とし, ニュートン法の第 n ステップでの近似解を x_n とするとき, 次の問に答えよ。

- (1) ξ が単根であるとき, x_n は ξ に 2 次収束することを示せ。
- (2) ξ が 2 重根であるとき, x_n は ξ に 1 次収束することを示せ。また, 収束率を求めよ。
- (3) ξ が 2 重根であるとき, 通常の反復式の代わりに, 修正した反復式

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

(ただし α は実数) を用いると, 2 次収束させることができる。そのためには α をどのように選べばよいか。また, α をその値に選んだ場合, 2 次収束することを示せ。

- (4) 方程式 $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ は $x = 2$ に 2 重根を持つ。 $x_0 = 3$ から出発して小問 (3) の修正版ニュートン法を 4 ステップ実行し, 近似解が実際に 2 次収束することを確かめよ。

問題 2

0 次のベッセル関数

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt \quad (2)$$

を区間 $[0, 1]$ で $n + 1$ 個の点 $x_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) での値を使ってラグランジュ補間することを考える。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) $J_0(x)$ の m 階微分を $J_0^{(m)}(x)$ と書くとき, 区間 $[0, 1]$ において $|J_0^{(m)}(x)| \leq 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)であることを示せ。ただし, x に関する微分と t に関する積分の順序を交換してよい。
- (2) $n + 1$ 個の点を使ったラグランジュ補間について, 区間 $[0, 1]$ 内での絶対誤差の上限を求めよ。ただし, 小問 (1) で導いた不等式を使ってよい。
- (3) 絶対誤差を 10^{-3} 以下にするには, n をどのように定めればよいか。

問題 3

積分 $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ の値を数値積分により求めることを考える。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 積分 I を刻み幅 $h = 2/n$ のシンプソン公式 ($n = 8, 16, \dots, 1024$) を用いて計算したところ, 計算値 I_n と誤差 $|I_n - I|$ は表 1 (裏面) のようになった。シンプソン公式の誤差は一般に h^4 のオーダーで減少すると言われるが, この例ではそうになっていない。これはなぜか。シンプソン公式に対する誤差評価式を用いて説明せよ。
- (2) この問題では, 適当な変数変換を行うと, 誤差の減少を速めることができる。どのような変換を行えばよいか述べよ。また, 変数変換を行った後の積分の式を書け。

表 1: シンプソン公式による積分値と誤差

n	I_n	$ I_n - I $
8	1.54179758	0.0289987493
16	1.56059458	0.0102017419
32	1.56719883	0.0035974923
64	1.56952611	0.0012702179
128	1.57034754	0.0004487888
256	1.57063771	0.0001586173
512	1.57074026	0.0000560702
1024	1.57077650	0.0000198221