

2007 年度 応用数学 中間試験解答

問題 1

(1) ニュートン法の反復式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

の両辺から真の解 ξ を引いて誤差 e_n に対する漸化式を求めると, $f(\xi) = 0, f'(\xi) \neq 0$ より, 次のようになる。

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{f(\xi + e_n)}{f'(\xi + e_n)} \\ &= e_n - \frac{f(\xi) + e_n f'(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\ &= \frac{e_n f'(\xi) + e_n^2 f''(\xi) - f(\xi) - e_n f'(\xi) - \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + O(e_n)} \\ &\simeq \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} e_n^2. \end{aligned} \quad (2)$$

よって, この場合, ニュートン法は 2 次収束する。

(2) ξ が 2 重根であるとき, $f(\xi) = 0, f'(\xi) = 0, f''(\xi) \neq 0$ であるから, 誤差 e_n に対する漸化式は次のようになる。

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{f(\xi + e_n)}{f'(\xi + e_n)} \\ &= e_n - \frac{f(\xi) + e_n f'(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\ &= \frac{e_n f'(\xi) + e_n^2 f''(\xi) - f(\xi) - e_n f'(\xi) - \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\ &\simeq \frac{1}{2} e_n. \end{aligned} \quad (3)$$

よって, この場合, ニュートン法は収束率 $\frac{1}{2}$ の 1 次収束をする。

(3) ξ が 2 重根であるとき, 修正した反復式を使うと, 誤差 e_n に対する漸化式は次のようになる。ただし, 項が消えることを見越して, 前小問より 1 次高い項まで取っておく。

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \alpha \cdot \frac{f(\xi + e_n)}{f'(\xi + e_n)} \\ &= e_n - \alpha \cdot \frac{f(\xi) + e_n f'(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + \frac{1}{6} e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f'''(\xi) + O(e_n^3)} \\ &= \frac{e_n f'(\xi) + e_n^2 f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^3 f'''(\xi) - \alpha f(\xi) - \alpha e_n f'(\xi) - \frac{\alpha}{2} e_n^2 f''(\xi) - \frac{\alpha}{6} e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f'''(\xi) + O(e_n^3)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) e_n^2 f''(\xi) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}\right) e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\ &\simeq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) e_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}\right) \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} e_n^2. \end{aligned} \quad (4)$$

2 次収束するには右边で e_n の 1 次の項が消えればよいから, $\alpha = 2$ と選べばよい。このとき 2 次収束することは, 式 (4) より明らかである。

注意 この修正版ニュートン法を使って 2 次収束となるのは, 2 重根のときだけである。単根のとき, 3 重根以上のときは, 通常のニュートン法より収束性が悪くなる。

- (4) 修正版ニュートン法による近似解と誤差を表 1 に示す。誤差 e_n は各ステップでほぼ 2 乗で減少しているの, 2 次収束が確認できる。なお, $n = 4$ で誤差の減少が小さいのは, 丸め誤差のためと考えられる。

表 1: 修正版ニュートン法による近似解と誤差

n	x_n	e_n
0	3	1.00×10^0
1	2.111111111	1.11×10^{-1}
2	2.001949318	1.94×10^{-3}
3	2.000000633	6.33×10^{-7}
4	2.000000001	9.74×10^{-10}

問題 2

- (1) $J_0(x)$ の m 階微分を求めると, x に関する微分と t に関する積分とを交換してよいことより,

$$J_0^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d^m}{dx^m} \cos(x \sin t) dt. \quad (5)$$

ここで,

$$\frac{d^m}{dx^m} \cos(x \sin t) = \begin{cases} \cos(x \sin t) (\sin t)^m & (m = 4k \text{ のとき}) \\ -\sin(x \sin t) (\sin t)^m & (m = 4k + 1 \text{ のとき}) \\ -\cos(x \sin t) (\sin t)^m & (m = 4k + 2 \text{ のとき}) \\ \sin(x \sin t) (\sin t)^m & (m = 4k + 3 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (6)$$

(ただし k は 0 以上の整数) であるから, どの場合にも $0 \leq t \leq \pi$ で $\left| \frac{d^m}{dx^m} \cos(x \sin t) \right| \leq 1$ となる。したがって, 任意の整数 $m \geq 0$ に対して,

$$\left| J_0^{(m)}(x) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{d^m}{dx^m} \cos(x \sin t) \right| dt \leq 1 \quad (7)$$

と言える。

- (2) $J_0(x)$ を $n + 1$ 個の点を使ってラグランジュ補間して得られる n 次関数を $J_{0,n}(x)$ と書くと, ラグランジュ補間の誤差の評価式および小問 (1) の結果より,

$$\left| J_{0,n}(x) - J_0(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{0 \leq \xi \leq 1} \left| J_0^{(n)}(\xi) \right| |1 - 0|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \quad (8)$$

となる。よって, 絶対誤差の上限は $\frac{1}{(n+1)!}$ となる。

- (3) $\frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$ となる最小の n を求めると, $n = 6$ となる。よって, n を 6 以上にすればよい。

問題 3

(1) 積分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ に対するシンプソン公式の誤差は、次のように評価できる。

$$|I_n - I| \leq \frac{1}{180} \max_{-1 \leq \xi \leq 1} |f^{(4)}(\xi)| \cdot (1+1) \cdot h^4. \quad (9)$$

したがって、関数 $f(x)$ の 4 階微分が区間 $[-1, 1]$ で有界ならば、誤差は h^4 のオーダーで減少する。しかし、 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ の場合、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ f^{(3)}(x) &= -3x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = -3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \\ f^{(4)}(x) &= -3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} - 15x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} = -3(1+4x^2)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

となり、 $f^{(4)}(x)$ は $x = \pm 1$ で発散する。したがって、式 (9) の右辺が意味を持たない。そのため、シンプソン公式の誤差が h^4 のオーダーとは言えなくなる。

(2) このような端点の特異性を除くには、2 重指数型変数変換

$$x = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) \quad (11)$$

を行えばよい。これにより、 $[-1, 1]$ の積分は $(-\infty, \infty)$ の積分に変換され、

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)\right) \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 - \tanh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^3\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} dt \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ただし、 $\cosh x$ 、 $\tanh x$ の定義から容易に示せる公式

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (13)$$

を用いた。式 (12) の積分は、明らかに被積分関数が解析的であり、かつ $t \rightarrow \pm\infty$ のとき、分子は指数関数的、分母は 2 重指数関数的に増大するため、被積分関数は急速に 0 に近づく。したがって、この積分に対して台形公式を適用し、適当な範囲で積分区間を打ち切れれば、非常に速い収束が得られる。