2007 年度　計算アルゴリズム　期末試験問題

（A4 用紙 1 枚表裏の自筆メモと電卓持込み可，各問題毎に解答用紙１枚使用）

問題 1

数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = b_0 + b_1\lambda_1^n + b_2\lambda_2^n + b_3\lambda_3^n + \cdots \tag{1}$$

と表され，$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots$ であるとする。このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = b_0$ の値を加速法により求めることを考える。

(1) いま，λ_1 の値が既知であるとする。このとき，a_n と a_{n+1} の線形結合を作ることにより λ_1 のべき乗の項を消去し，a_n より速く b_0 に収束する数列 c_n を作れ。
（ヒント： これは講義でやったリチャードソン加速法と同じものである。）

(2) 次に，λ_1 の値が未知である場合を考える。このとき，λ_1 は

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} \tag{2}$$

と表せることを示せ。

(3) 上記 (2) の結果より，有限の n に対し，$\lambda_1 \simeq (a_{n+2} - a_{n+1})/(a_{n+1} - a_n)$ と近似できる。これを (1) の c_n の式に代入することにより，λ_1 がわからない場合でも a_n より速く b_0 に収束する数列を作れ。このようにして数列の収束を加速することを**エイトケン加速**と呼ぶ。

問題 2

A を $n \times n$ 行列，$\mathbf{x}$，$\mathbf{b}$ を長さ n のベクトルとし，$\mathbf{x}$ に関する連立 1 次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3}$$

を考える。この方程式をガウスの消去法で解くには，まず係数行列 A を上三角行列に変形する。この操作について，次の問に答えよ。

(1) 上三角行列への変形のアルゴリズムを書け。ただし，記述には適当なプログラミング言語を用いてもよい。また，ピボット選択は行わなくてよい。

(2) A が三重対角行列とする。このとき，小問 (1) のアルゴリズムにおいて，不要な計算を省略すると，計算量を大幅に削減できる。そのためには，アルゴリズムをどのように修正すればよいか。
（ヒント： 三重対角行列では，ある列において対角要素より下の要素は 1 個だけである。したがって，第 (k, k) 要素による消去では，第 $k + 1$ 行のみを消去すればよい。さらに，第 k 行において対角要素より右の要素は 1 個だけであるから，ある行から第 k 行の定数倍を差し引くとき，変更を受けるのは第 $k + 1$ 列まででである。）

(3) 小問 (2) の修正版アルゴリズムの計算量（四則演算の回数）を n の関数として表せ。

問題 3

$0 \le x \le 1$，$t \ge 0$ において，次の方程式（1 次元移流拡散方程式）の初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{5}$$

$$u(0,t) = c_1, \quad u(1,t) = c_2 \tag{6}$$

を考える。ここで，κ, v, c_1, c_2 はすべて正の定数である。この方程式を陽的差分法で解くため，空間方向，時間方向の刻み幅をそれぞれ $h = \frac{1}{M}$，k として $x_i = ih$，$t_j = jk$ とし，格子点 (x_i, t_j) における u の値を u_{ij} とおく。また，$\mathbf{u}_j = [u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{M-1,j}]^t$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 陽的差分法の適用にあたって，式 (4) 右辺の 2 階微分，1 階微分の項をそれぞれ中心差分で近似する。このとき，$\mathbf{u}_j$ から $\mathbf{u}_{j+1}$ を計算する式は次のようになることを示せ。ただし，$r = \frac{\kappa k}{h^2}$，$q = \frac{vk}{2h}$ である。

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{j+1} &= A\mathbf{u}_j + \mathbf{b}_j \\
&= \begin{pmatrix} 1-2r & r+q & & & \\ r-q & 1-2r & r+q & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r-q & 1-2r & r+q \\ & & & r-q & 1-2r \end{pmatrix} \mathbf{u}_j + \begin{pmatrix} (r-q)c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (r+q)c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

(2) 以後，$r > q$ が成り立っていると仮定する。$(M-1) \times (M-1)$ の対角行列 D を

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \sqrt{\frac{r+q}{r-q}} & & & \\ & & \left(\sqrt{\frac{r+q}{r-q}}\right)^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \left(\sqrt{\frac{r+q}{r-q}}\right)^{M-2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

と定義する。このとき，DAD^{-1} はどんな行列になるか。小問 (1) の A と同様な形で示せ。また，A の固有値と DAD^{-1} の固有値との間にはどんな関係があるかを述べよ。

(3) 一般に，$(M-1) \times (M-1)$ 行列

$$D = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ & & & b & a \end{pmatrix} \tag{9}$$

の固有値は，

$$a + 2b \cos\left(\frac{l\pi}{M}\right) \quad (l = 1, 2, \ldots, M-1) \tag{10}$$

である。このことを利用し，DAD^{-1} の固有値をすべて求めよ。また，A の固有値をすべて求めよ。

(4) 小問 (3) の結果を用いて，式 (7) の陽的差分法が安定となるための条件を求めよ。ただし，$M \gg 1$ としてよい。