

2007 年度 計算アルゴリズム 期末試験解答

問題 1

(1) a_n と a_{n+1} に関する式

$$\begin{aligned} a_n &= b_0 + b_1 \lambda_1^n + b_2 \lambda_2^n + b_3 \lambda_3^n + \cdots \\ a_{n+1} &= b_0 + b_1 \lambda_1^{n+1} + b_2 \lambda_2^{n+1} + b_3 \lambda_3^{n+1} + \cdots \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} c_n &\equiv a_{n+1} - \lambda_1 a_n \\ &= (1 - \lambda_1) b_0 + (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2^n b_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) \lambda_3^n b_3 + \cdots \end{aligned} \quad (1)$$

となる。 $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots$ であり, c_n では λ_1^n の項が消えているため, c_n は a_n よりも速く b_0 に収束する。

(2) 与えられた式を, 以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} &= \frac{(\lambda_1 - 1) \lambda_1^{n+1} b_1 + (\lambda_2 - 1) \lambda_2^{n+1} b_2 + (\lambda_3 - 1) \lambda_3^{n+1} b_3 + \cdots}{(\lambda_1 - 1) \lambda_1^n b_1 + (\lambda_2 - 1) \lambda_2^n b_2 + (\lambda_3 - 1) \lambda_3^n b_3 + \cdots} \\ &= \frac{\lambda_1 + \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1} \cdot \lambda_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \frac{b_2}{b_1} + \frac{\lambda_3 - 1}{\lambda_1 - 1} \cdot \lambda_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^n \frac{b_3}{b_1} + \cdots}{1 + \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \frac{b_2}{b_1} + \frac{\lambda_3 - 1}{\lambda_1 - 1} \cdot \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^n \frac{b_3}{b_1} + \cdots} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^n \rightarrow 0$ ($k \geq 2$) だから, $n \rightarrow \infty$ のとき分子・分母の第 2 項以降は消える。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \lambda_1 \quad (3)$$

が成り立つ。

(3) 小問 (2) より, n が大きいとき λ_1 は $\lambda_1 \simeq \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$ と近似できる。これを c_n の定義式に代入して得られる数列を d_n とすると,

$$\begin{aligned} d_n &\equiv \frac{a_{n+1} - \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} \cdot a_n}{1 - \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}} \\ &= \frac{a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

問題 2

(1) 係数行列 A の第 (i, j) 要素を $a_{ij}^{(1)}$ と書くと, 上三角化のアルゴリズムは次のようになる。

```

do  $k = 1, n$ 
  do  $i = k + 1, n$ 
    do  $j = k + 1, n$ 
       $a_{ij}^{(k+1)} := a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ 
    end do
  end do
end do
    
```

この結果得られる $a_{ij}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = i, i + 1, \dots, n$) が上三角化された行列の要素となる。

- (2) ヒントに述べられているとおり，第 k 行により消去される行は，第 $k+1$ 行のみである。また，この消去によって影響を受けるのは，第 $k+1$ 列までである。したがって，小問 (1) のアルゴリズムにおいて，添字 i, j の取る値は，ともに $k+1$ のみとなる。ただし， $k = n$ のときには，消去すべき行がないので，処理は行わない。以上の修正を加えると，アルゴリズムは次のようになる。

```

do  $k = 1, n - 1$ 
   $a_{k+1,k+1}^{(k+1)} := a_{k+1,k+1}^{(k)} - \frac{a_{k+1,k}^{(k)} a_{k,k+1}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ 
end do

```

- (3) 小問 (2) のアルゴリズムでは，ループの 1 回の繰り返しで，乗算，除算，減算がそれぞれ 1 回必要である。したがって，計算量は $3n - 3$ となる。

問題 3

- (1) 与えられた 1 次元移流拡散方程式に陽的差分法を適用し，右辺の 2 階微分，1 階微分の項にそれぞれ中心差分を適用すると次の式が得られる。

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \kappa \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + v \frac{u_{i+1} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad (5)$$

すなわち，

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{\kappa k}{h^2} + \frac{vk}{2h} \right) u_{i+1,j} + \left(1 - 2\frac{\kappa k}{h^2} \right) u_{ij} + \left(\frac{\kappa k}{h^2} - \frac{vk}{2h} \right) u_{i-1,j}. \quad (6)$$

これを r, q を使って書くと次のようになる。

$$u_{i,j+1} = (r + q)u_{i+1,j} + (1 - 2r)u_{ij} + (r - q)u_{i-1,j}. \quad (7)$$

境界条件 $u_{0j} = c_1, u_{Mj} = c_2$ に注意して，これを行列形式で書くと，小問 (1) の式が得られる。

- (2) A に左から行列 D をかけると，第 i 行が $\left(\sqrt{\frac{r+q}{r-q}} \right)^{i-1}$ 倍される。また，右から行列 D^{-1} をかけると，第 j 列が $\left(\sqrt{\frac{r+q}{r-q}} \right)^{-(j-1)}$ 倍される。これらの効果を合わせると，左右からそれぞれ D, D^{-1} をかけることで， A の対角要素は不変，対角より 1 個下の要素は $\sqrt{\frac{r+q}{r-q}}$ 倍，対角より 1 個上の要素は $\sqrt{\frac{r-q}{r+q}}$ 倍される。したがって，

$$DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - 2r & \sqrt{r^2 - q^2} & & & \\ \sqrt{r^2 - q^2} & 1 - 2r & \sqrt{r^2 - q^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{r^2 - q^2} & 1 - 2r & \sqrt{r^2 - q^2} \\ & & & \sqrt{r^2 - q^2} & 1 - 2r \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。

- (3) DAD^{-1} は，小問 (3) の行列で

$$a = 1 - 2r, \quad b = \sqrt{r^2 - q^2} \quad (9)$$

と置いた場合である。したがって，その固有値は

$$\lambda_l = 1 - 2r + 2\sqrt{r^2 - q^2} \cos\left(\frac{l\pi}{M}\right) \quad (l = 1, 2, \dots, M - 1) \quad (10)$$

となる。 A の固有値も同じである。

(4) A の固有値がもっとも大きくなるのは，式 (10) において $l = 1$ のとき，もっとも小さくなるのは $l = M - 1$ のときである。 $M \gg 1$ より， $\frac{\pi}{M} \simeq 0$ ， $\frac{(M-1)\pi}{M} \simeq \pi$ と近似すると， A の最大固有値は $1 - 2r + 2\sqrt{r^2 - q^2}$ ，最小固有値は $1 - 2r - 2\sqrt{r^2 - q^2}$ となる。陽的差分法が安定である条件は， A の固有値の絶対値がすべて 1 以下となることであり，この条件は，

$$1 - 2r + 2\sqrt{r^2 - q^2} \leq 1 \quad (11)$$

$$1 - 2r - 2\sqrt{r^2 - q^2} \geq -1 \quad (12)$$

と書ける。ここで，式 (11) を変形すると，

$$\sqrt{r^2 - q^2} \leq r \quad (13)$$

となるが， $r > 0$ より，これは常に成り立つ。一方， $r > 0$ に注意して式 (12) を変形すると，

$$\begin{aligned} 1 - r &\geq \sqrt{r^2 - q^2}, \\ 2r - q^2 &\leq 1, \\ 2\frac{\kappa k}{h^2} - \frac{v^2 k^2}{4h^2} &\leq 1 \end{aligned} \quad (14)$$

となる。この最後の式が陽的差分法の安定性の条件である。