

2007年度 応用数学 第1回レポート課題

11/26(月)の授業終了時に提出してください。

問題1

$x > 0, |x| \ll 1$ のとき, 以下の各式の計算において桁落ちが生じる可能性があるかどうか判定せよ。可能性がある場合, どのように式を変形すれば桁落ちが避けられるかを述べよ。ただし \log は自然対数を表す。また, 3乗根, \log, \tan などの関数は高精度に計算できるとする。

(1) $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}$

(2) $\log(1+x) - \log(1-x)$

(3) $\tan(1+x) - \tan(1-x)$

問題2

(1) 次の連立方程式の解をニュートン法で求めるための反復式 (x_n, y_n から x_{n+1}, y_{n+1} を求める式) を書け。

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 2 \\ 3x^2y - y^3 = 11 \end{cases} \quad (1)$$

(2) 小問(1)の結果に基づき, 初期値 $x_0 = 3, y_0 = 2$ から出発してニュートン法を5回反復し, 各反復での近似解 x_n, y_n を出力するプログラムを書け。言語は何でもよいが, 倍精度で計算するようにせよ。

(3) 上記のプログラムを実行し, 結果を添付せよ。もし計算機が利用できない場合は, 手計算でもよい。その場合は, 3回反復すればよい。

(4) 方程式(1)の解(の1つ)は $x = 2, y = 1$ である。各ステップでの誤差 $\epsilon_n = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$ が n とともにどのように減少するか, 実験結果から考察せよ。また, これより, この場合のニュートン法の収束次数を推定せよ。

問題3

(1) $f(x) = \cosh x$ を区間 $[0, 1]$ で $n+1$ 個の点 $x_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) を使ってラグランジュ補間する。このとき, 区間内における絶対誤差の上限を求めよ。

(2) 絶対誤差を 10^{-8} 以下にするには, n をどのように定めればよいか。