2007年度　計算アルゴリズム　第2回レポート課題

- 1/21（月）の授業終了時に提出してください。
- 問題1全部，問題2(1)，問題3全部を解答すること。なお，どうしても計算機が利用できない場合は，問題1(3)は解答しなくてよいが，その代わりに問題2(2)を解答すること。

問題1

常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x, y), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

の数値解法について次の問に答えよ。ただし，$y' = \frac{dy}{dx}$ である。

(1) 常微分方程式 (1) をオイラー法で解くプログラムを作成せよ。言語は何でもよい。ただし，計算は倍精度とし，初期値 y_0 と分割数 n を入力し，刻み幅を $h = \frac{1}{n}$ として計算するようにせよ。また，関数 $f(x, y)$ は，サブルーチン（C 言語ならば関数）として与えるようにせよ。

(2) 常微分方程式 (1) をホイン法で解くプログラムを作成せよ。条件は小問 (1) と同じとする。

(3) 小問 (1)，(2) で作成したプログラムを用いて，常微分方程式

$$y' = x + y + 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = -1 \tag{2}$$

を解け。ただし，$n = 10$，20，40 と変えて計算し，それぞれの解法について，$x = 1$ における誤差が $h = \frac{1}{n}$ の何乗で減少するかを観察せよ。なお，この方程式の解析解は $y = -x + e^x - 2$ である。

問題2

積分

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx \tag{3}$$

の値を，標本点 $x_i = ih$（ただし $h = \frac{1}{n}$，$i = 0, 1, \ldots, n$）での関数値 $y_i = f(x_i)$ を用いて数値積分により近似することを考える。ただし，n は4の倍数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) I を刻み幅 h の台形公式で近似した値を $I_h^{(1)}$ とすると，$I_h^{(1)} = I + ch^2 + O(h^3)$（$c$ は定数）と書ける。これより，$I_h^{(1)}$ と $I_{2h}^{(1)}$ を用いて，より高精度な I の近似値を計算できる（台形公式に対する加速法の適用）。こうして得られた近似値を $\sum_{i=0}^{n} w_i y_i$ と書くとき，w_i を求めよ。また，この式が刻み幅 h のシンプソン公式による I の近似値に他ならないことを示せ。

(2) I を刻み幅 h のシンプソン公式で近似した値を $I_h^{(2)}$ とすると，$I_h^{(2)} = I + dh^4 + O(h^5)$（$d$ は定数）と書ける。これより，$I_h^{(2)}$ と $I_{2h}^{(2)}$ を用いて，より高精度な I の近似値を計算できる（シンプソン公式に対する加速法の適用）。こうして得られた近似値を $\sum_{i=0}^{n} v_i y_i$ と書くとき，v_i を求めよ。また，この近似値の誤差は h の少なくとも何乗のオーダーになるか。

問題 3

$0 \le x \le 1$，$t \ge 0$ における 1 次元熱伝導方程式の初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{5}$$

$$u'(0,t) = 0, \quad u(1,t) = c \tag{6}$$

に対する陽的差分法の安定性を解析することを考える。空間方向，時間方向の刻み幅をそれぞれ $h = \frac{1}{M}$，k として $x_i = ih$，$t_j = jk$ とし，格子点 (x_i, t_j) における u の値を u_{ij} とする。また，$\mathbf{u}_j = [u_{0j}, u_{1j}, \ldots, u_{M-1,j}]^t$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $x = 0$ における第 2 種境界条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ を近似的に取り入れるため，$u_{0,j+1}$ を

$$\frac{u_{0,j+1} - u_{0,j}}{k} = \frac{\kappa}{h} \cdot \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h} \tag{7}$$

により決めることにする（こうすると，$\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h} \simeq \frac{\partial u}{\partial x}$ が正のとき $u_{0,j+1}$ は $u_{0,j}$ より大きくなり，次のステップで $\frac{\partial u}{\partial x}$ は 0 の方向に近づく。逆の場合も同様)。一方，$u_{1,j+1}, \ldots, u_{M-1,j+1}$ は式 (4) に空間方向の 2 階中心差分と時間方向の前進差分を適用して求めることにする。このとき，$\mathbf{u}_j$ から $\mathbf{u}_{j+1}$ を計算する式は次のようになることを示せ。ただし，$r = \frac{\kappa k}{h^2}$ である。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+1} &= A\mathbf{u}_j + \mathbf{b}_j \\ &= \begin{pmatrix} 1-r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \mathbf{u}_j + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

(2) 行列 A の固有値の 1 つを λ，対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}$，$\mathbf{v}$ の成分を v_j（$j = 0, 1, \ldots, M-1$）とするとき，v_{j-1}，v_j，v_{j+1} の満たす 3 項間の漸化式を求めよ。ただし，$v_{-1} = v_0$，$v_M = 0$ と定義する。

(3) $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$（ただし i は虚数単位）とおき，境界条件 $v_{-1} = v_0$，$v_M = 0$ より，$c_1 = c_2 = 0$ 以外の解が存在するための θ に関する条件を求めよ。また，v_j の式と求めた θ を小問 (2) の漸化式に代入することにより，固有値 λ を（M 個）求めよ。

(4) 小問 (3) の結果を用いて，式 (8) の陽的差分法が安定となるための条件を求めよ。ただし，$M \gg 1$ としてよい。