2007 年度　計算アルゴリズム　第 1 回レポート解答

問題 1

(1) $\sqrt[3]{1+x}$ と $\sqrt[3]{1-x}$ は非常に近い同符号の数であるため，引き算をすると桁落ちが生じる。これを防ぐには，次のように分子の有理化を行ってから計算すればよい。

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x} &= \frac{(1+x)-(1-x)}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2} \\ &= \frac{2x}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

(2) $\log(1+x)$ と $\log(1-x)$ とは符号が異なるため，引き算しても桁落ちは生じない。よって，元の式のまま計算すればよい。

(3) $\tan(1+x)$ と $\tan(1-x)$ は非常に近い同符号の数であるため，引き算をすると桁落ちが生じる。これを防ぐには，次のように変形してから計算すればよい。

$$\begin{aligned} \tan(1+x)-\tan(1-x) &= \frac{\sin(1+x)}{\cos(1+x)}-\frac{\sin(1-x)}{\cos(1-x)} \\ &= \frac{\sin(1+x)\cos(1-x)-\sin(1-x)\cos(1+x)}{\cos(1+x)\cos(1-x)} \\ &= \frac{\sin\{(1+x)-(1-x)\}}{\cos(1+x)\cos(1-x)} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos(1+x)\cos(1-x)}. \end{aligned} \tag{2}$$

問題 2

(1)

$$f(x,y)=x^3-3xy^2-2, \quad g(x,y)=3x^2y-y^3-11 \tag{3}$$

とおくと，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-6xy, \quad \frac{\partial g}{\partial x}=6xy, \quad \frac{\partial g}{\partial y}=3x^2-3y^2. \tag{4}$$

よって，2 変数ニュートン法の反復式は，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{x=x_n, y=y_n} \right)^{-1} \begin{bmatrix} f(x_n,y_n) \\ g(x_n,y_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_n,y_n) \\ g(x_n,y_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \frac{1}{3(x_n^2+y_n^2)^2} \begin{bmatrix} x_n^2-y_n^2 & 2x_ny_n \\ -2x_ny_n & x_n^2-y_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3-3xy^2-2 \\ 3x^2y-y^3-11 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

となる。

(2) ホームページのシラバス中のプログラム「Newton2d.f」を参照。

n	x_n	y_n	e_n
0	3.00000000	2.00000000	1.41×10^{0}
1	2.28007890	1.39447732	4.83×10^{-1}
2	2.01951114	1.08040830	8.27×10^{-2}
3	1.99833940	1.00245668	3.00×10^{-3}
4	1.99999705	0.99999740	3.93×10^{-6}
5	2.00000000	1.00000000	6.92×10^{-12}

(3) 初期値 $x_0 = 3, y_o = 2$ から始めてニュートン法を 5 ステップ実行すると，表のようになる。ただし，e_n は真の解 $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 1)$ との誤差のノルムで，$e_n = \sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2}$ である。

(4) $e_{n+1} \simeq e_n^2$ が成り立つことから，2 次収束であると推定される。
（参考： 2 次収束することは，理論的にも証明できる。）

問題 3

(1) 区間 $[0, 1]$ における n 次のラグランジュ補間の絶対誤差の上限を e_n とすると，公式より，

$$\begin{aligned} e_n &= \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \le \xi \le x_n} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| |x_n - x_0|^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \max_{0 \le \xi \le 1} \left| \cosh^{(n+1)}(\xi) \right| \end{aligned} \tag{6}$$

である。$\cosh x$ の偶数階微分は $\cosh x$，奇数階微分は $\sinh x$ で，$x \in [0, 1]$ のときこれらは共に $x = 1$ で最大値を取るから，

$$e_n = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \tag{7}$$

となる。

(2) $e_n < 10^{-8}$ となる最小の n を求める。奇数，偶数の場合を分けて考え，より小さい n で誤差の限界を満たすほうを採用すればよい。

まず，n が奇数の場合は，

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{e^x + e^{-1}}{2} \simeq \frac{1}{(n+1)!} \times 1.543 < 10^{-8}. \tag{8}$$

これを満たす最小の n は 11 である。

一方，n が偶数の場合は，

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{e^x - e^{-1}}{2} \simeq \frac{1}{(n+1)!} \times 1.175 < 10^{-8}. \tag{9}$$

これを満たす最小の n は 12 である。

以上より，$n = 11$ と定めればよい。