

2007 年度 計算アルゴリズム 第 2 回レポート 解答

問題 1

- (1) ホームページのシラバス中のプログラム「Euler.f」を参照。なお、このプログラムでは、関数 $f(x, y)$ で常微分方程式の右辺の関数を計算し、関数 $\text{sol}(x)$ で真の解を計算している。また、各ステップで x 、オイラー法による解、真の解、誤差を出力している。
- (2) ホームページのシラバス中のプログラム「Heun.f」を参照。なお、このプログラムでは、関数 $f(x, y)$ で常微分方程式の右辺の関数を計算し、関数 $\text{sol}(x)$ で真の解を計算している。また、各ステップで x 、オイラー法による解、真の解、誤差を出力している。
- (3) オイラー法、ホイン法のそれぞれで $n = 10, 20, 40$ として計算したときの $x = 1$ における誤差を表 1 に示す。表より、同じ分割数でもホイン法のほうが良い近似値が得られていることがわかる。また、オイラー法の誤差は $O(h)$ 、ホイン法の誤差は $O(h^2)$ で減少している。これは理論的な解析の結果と一致している。

表 1: オイラー法とホイン法による数値解の誤差

n	オイラー法	ホイン法
10	0.124539	0.004200
20	0.064984	0.001090
40	0.033217	0.000277

問題 2

- (1) $I_h^{(1)} = I + ch^2 + O(h^3)$, $I_{2h}^{(1)} = I + c(2h)^2 + O(h^3)$ と書けるから、

$$4I_h^{(1)} - I_{2h}^{(1)} = 3I + O(h^3) \quad (1)$$

これより、

$$I = \frac{4}{3}I_h^{(1)} - \frac{1}{3}I_{2h}^{(1)} + O(h^3). \quad (2)$$

ここで、刻み幅 h の台形公式の重みは、両端点 x_0, x_n で $\frac{h}{2}$ 、その他の点で h となる。一方、刻み幅 $2h$ の台形公式の重みは、両端点 x_0, x_n で h 、偶数番目の点 $x_2, x_4, \dots, x_{n-2}$ で $2h$ 、奇数番目の点 $x_1, x_3, \dots, x_{n-1}$ で 0 となる。したがって、これらを組み合わせた公式 $\frac{4}{3}I_h^{(1)} - \frac{1}{3}I_{2h}^{(1)}$ の重みは、

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot h = \frac{h}{3} & (i = 0, n \text{ のとき}) \\ \frac{4}{3} \cdot h - \frac{1}{3} \cdot 2h = \frac{2}{3}h & (i = 2, 4, \dots, n-2 \text{ のとき}) \\ \frac{4}{3} \cdot h - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{4}{3}h & (i = 1, 3, \dots, n-1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3)$$

となる。これは刻み幅 h のシンプソン公式の重みに他ならないから、台形公式の加速により得られる近似値は刻み幅 h のシンプソン公式により得られる近似値に等しいことがわかる。

- (2) $I_h^{(2)} = I + dh^4 + O(h^5)$, $I_{2h}^{(2)} = I + d(2h)^4 + O(h^5)$ と書けるから、

$$16I_h^{(2)} - I_{2h}^{(2)} = 15I + O(h^5) \quad (4)$$

これより，

$$I = \frac{16}{15}I_h^{(2)} - \frac{1}{15}I_{2h}^{(2)} + O(h^5). \quad (5)$$

ここで，刻み幅 h のシンプソン公式の重みは，両端点 x_0, x_n で $\frac{h}{3}$ ， x_{2k} ($k = 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}$) で $\frac{2}{3}h$ ， x_{2k-1} ($k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$) で $\frac{4}{3}h$ となる。一方，刻み幅 $2h$ のシンプソン公式の重みは，両端点 x_0, x_n で $\frac{2}{3}h$ ， x_{4k} ($k = 1, 2, \dots, \frac{n-4}{4}$) で $\frac{4}{3}h$ ， x_{4k-2} ($k = 1, 2, \dots, \frac{n}{4}$) で $\frac{8}{3}h$ ，その他の点で 0 となる。したがって，これらを組み合わせた公式 $\frac{16}{15}I_h^{(2)} - \frac{1}{15}I_{2h}^{(2)}$ の重みは，

$$v_i = \begin{cases} \frac{16}{15} \cdot \frac{h}{3} - \frac{1}{15} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{14}{45}h & (i = 0, n \text{ のとき}) \\ \frac{16}{15} \cdot \frac{4h}{3} - \frac{1}{15} \cdot 0 = \frac{64}{45}h & (i = 2k+1 \text{ } (k = 0, 1, \dots, \frac{n-2}{2}) \text{ のとき}) \\ \frac{16}{15} \cdot \frac{2h}{3} - \frac{1}{15} \cdot \frac{4h}{3} = \frac{28}{45}h & (i = 4k \text{ } (k = 1, 2, \dots, \frac{n-4}{4}) \text{ のとき}) \\ \frac{16}{15} \cdot \frac{2h}{3} - \frac{1}{15} \cdot \frac{8h}{3} = \frac{24}{45}h & (i = 4k-2 \text{ } (k = 1, 2, \dots, \frac{n}{4}) \text{ のとき}) \end{cases} \quad (6)$$

となる。式 (5) より，この公式の誤差は h の少なくとも 5 乗のオーダーである。

問題 3

(1) $u_{0,j+1}$ を決める式より，

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= u_{0,j} + \frac{\kappa k}{h^2} (u_{1,j} - u_{0,j}) \\ &= (1-r)u_{0,j} + ru_{1,j}. \end{aligned} \quad (7)$$

$u_{i,j+1}$ ($i = 1, 2, \dots, M-1$) については，元の熱伝導方程式に空間方向の 2 階中心差分と時間方向の前進差分を適用すると，

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \kappa \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}, \quad (8)$$

すなわち，

$$u_{i,j+1} = ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \quad (i = 1, 2, \dots, M-1) \quad (9)$$

となる。式 (7) と式 (9) をまとめて行列形式で表すと，問題に与えられた u_j の計算式が得られる。

(2) 固有方程式 $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ただし E は単位行列) の第 j 成分を書き下すと，

$$rv_{j-1} + (1-2r-\lambda)v_j + rv_{j+1} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, M-1) \quad (10)$$

となる。ここで， $v_{-1} = v_0$ ， $v_M = 0$ という定義を用いた。式 (10) が求める 3 項漸化式である。

(3) $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ を $v_{-1} - v_0 = 0$ ， $v_M = 0$ に代入すると，

$$v_{-1} - v_0 = c_1(e^{-i\theta} - 1) + c_2(e^{i\theta} - 1) = 0 \quad (11)$$

$$v_M = c_1 e^{iM\theta} + c_2 e^{-iM\theta} = 0 \quad (12)$$

これが $c_1 = c_2 = 0$ 以外の解を持つ条件は，

$$(e^{-i\theta} - 1)e^{-iM\theta} - (e^{i\theta} - 1)e^{iM\theta} = 0. \quad (13)$$

整理すると，

$$\sin M\theta - \sin(M+1)\theta = 0 \quad (14)$$

すなわち，

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos \left(M + \frac{1}{2} \right) \theta = 0. \quad (15)$$

ここで， θ を $\theta + 2m\pi$ (m は整数) で置き換えても v_j の値は変わらない。さらに， θ と $\theta + \pi$ は， c_1 と c_2 の役割を交換すれば同じ解を与えるから， θ は $0 \leq \theta < \pi$ の範囲で考えてよい。そこで， $\sin \frac{\theta}{2} = 0$ の場合を考えると， $\theta = 0$ 。このとき，式 (12) より $c_1 + c_2 = 0$ 。ところがこのとき， $v_j = c_1 + c_2 = 0$ ($0 \leq j \leq M-1$) となり， $\mathbf{v} = 0$ となるので不適である。よって， $\cos \left(M + \frac{1}{2} \right) \theta = 0$ でなければならない。 $0 \leq \left(M + \frac{1}{2} \right) \theta \leq \left(M + \frac{1}{2} \right) \pi$ であるから，これを満たす θ は，

$$\left(M + \frac{1}{2} \right) \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots, \frac{2M-1}{2}\pi \quad (16)$$

すなわち

$$\theta = \frac{2k-1}{2M+1}\pi, \quad (k = 1, 2, \dots, M) \quad (17)$$

の M 個である。

一方， $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ を式 (10) に代入すると，

$$r \left(c_1 e^{i(j-1)\theta} + c_2 e^{-i(j-1)\theta} \right) + (1 - 2r - \lambda) \left(c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta} \right) + r \left(c_1 e^{i(j+1)\theta} + c_2 e^{-i(j+1)\theta} \right) = 0 \quad (18)$$

整理すると，

$$(c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}) (2r \cos \theta + (1 - 2r - \lambda)) = 0 \quad (19)$$

これがすべての j ($0 \leq j \leq M-1$) について成り立たねばならないから，

$$2r \cos \theta + (1 - 2r - \lambda) = 0 \quad (20)$$

すなわち，

$$\lambda = 1 - 2r(1 - \cos \theta) = 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{2k-1}{2(2M+1)}\pi \right) \quad (k = 1, 2, \dots, M). \quad (21)$$

- (4) 陽的差分法が安定となるには，行列 A の固有値の絶対値がすべて 1 以下であればよい。式 (21) で与えられる固有値は 1 より小さいから， -1 より小さくなる場合が問題となる。固有値が負の方向に最大となるのは $k = M$ のときで，このとき固有値は ($M \gg 1$ を用いると) 約 $1 - 4r$ となる。よって， $1 - 4r \geq -1$ ，すなわち

$$\frac{\kappa k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (22)$$

であればよい。これは，両端で第 1 種境界条件を与えた場合の安定性条件と同じである。