2008 年度　計算アルゴリズム　中間試験問題

（A4 用紙 1 枚表裏の自筆メモと電卓持込み可，各問題毎に解答用紙１枚使用）

問題 1

ニュートン法により 10 の 3 乗根を計算することを考える。このとき，次の問に答えよ。

(1) 3 乗根を求める一つの方法として，$f(x) = x^3 - 10$ とおき，$f(x) = 0$ の解をニュートン法で求めることが考えられる。このときのニュートン法の反復式（x_n から x_{n+1} を求める式）を書け。

(2) 他の方法として，$f(x) = x^2 - \frac{10}{x}$ とおき，$f(x) = 0$ の解をニュートン法で求めることが考えられる。このときのニュートン法の反復式を書け。

両方の方法でプログラムを書き，$x_0 = 3$ から始めてそれぞれ 5 回の反復を行ったところ，結果は次のようになった。ただし，$e_n = \left|x_n - \sqrt[3]{10}\right|$ である。

表 1: 小問 (1) の方法による結果

n	x_n	e_n
0	3.0000000000000000	0.8455653099681162
1	2.3703703703703702	0.2159356803384864
2	2.1735086323302468	0.0190739422983630
3	2.1546015865564190	0.0001668965245352
4	2.1544347029594388	0.0000000129275550
5	2.1544346900318838	0.0000000000000000

表 2: 小問 (2) の方法による結果

n	x_n	e_n
0	3.0000000000000000	0.8455653099681162
1	2.2031250000000000	0.0486903099681162
2	2.1544507159467043	0.0000160259148205
3	2.1544346900318843	0.0000000000000004
4	2.1544346900318838	0.0000000000000000
5	2.1544346900318838	0.0000000000000000

(3) 小問 (1) の方法は何次収束となっているか。表 1 から推測せよ。また，e_{n+1} と e_n の関係式を導くことにより，その推測が正しいことを理論的に示せ。

(4) 小問 (2) の方法は何次収束となっているか。表 2 から推測せよ。また，e_{n+1} と e_n の関係式を導くことにより，その推測が正しいことを理論的に示せ。
（ヒント： この場合，$f(x) = 0$ となる点で $f''(x)$ がどうなるかを考えよ。それに基づき，e_{n+1} を導く過程において，テイラー展開を通常より 1 次高い次数まで取って計算せよ。）

問題 2

関数 $f(x) = \cos x$ を区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に対し，5 個の点 $x_0 = -\frac{\pi}{2}$，$x_1 = -\frac{\pi}{4}$，$x_2 = 0$，$x_3 = \frac{\pi}{4}$，$x_4 = \frac{\pi}{2}$ を使って 4 次のラグランジュ補間を行う。このとき，次の問に答えよ。

(1) ラグランジュ補間の式 $f_4(x)$ を求めよ。
（ヒント： 本問では，ニュートン補間よりも直接ラグランジュ補間の公式を使ったほうが簡単である。）

(2) 区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ における絶対誤差の上限を求めよ。

(3) $x = \frac{\pi}{3}$ における $f(x)$ および $f_4(x)$ の値を求め，誤差 $|f(x) - f_4(x)|$ が小問 (2) で求めた上限以下であることを確認せよ。

問題 3

答がわかっている次の積分を用いて，台形公式とシンプソン公式の精度を理論的に比較することを考える。

$$I = \int_0^1 x^4 \, dx \tag{1}$$

ただし，両公式とも区間 $[0, 1]$ を n 等分（n は偶数）して計算する。また，$h \equiv \frac{1}{n}$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 台形公式による I の近似値 $I^{(1)}$ を計算し，h の関数として表せ。

(2) シンプソン公式による I の近似値 $I^{(2)}$ を計算し，h の関数として表せ。

(3) 台形公式の誤差 $I^{(1)} - I$，シンプソン公式の誤差 $I^{(2)} - I$ を計算し，それぞれ h の何乗のオーダーになるか調べよ。ただし，必要ならば次の公式を用いてよい。

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30 = (6n^5+15n^4+10n^3-n)/30 \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1)^4 = n(2n+1)(2n-1)(12n^2-7)/15 = (48n^5-40n^3+7n)/15 \tag{3}$$